

1. 다음 등식이 x 에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c 의 값을 구하여라.

$$ax^2 - x + c - 3 = 2x^2 - bx - 2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 2$

▷ 정답: $b = 1$

▷ 정답: $c = 1$

해설

각 항의 계수를 서로 비교한다.

2. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + 6 = 0$ 의 근을 구하면 $x = a \pm \sqrt{b}i$ 이다.
 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$x^2 - 4x + 6 = 0$$

근의 공식을 이용하면 $x = 2 \pm \sqrt{4 - 6} = 2 \pm \sqrt{2}i$

$$\therefore a = b = 2, \quad a + b = 4$$

3. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하고 판별식을 D 라고 할 때 $|\alpha - \beta|$ 는 다음 중 어느 것과 같은가?

- ① $\frac{\sqrt{D}}{a}$ ② $\frac{-\sqrt{D}}{a}$ ③ $\frac{\sqrt{D}}{|a|}$
④ $-\frac{\sqrt{D}}{|a|}$ ⑤ $-\frac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$\text{즉 } \alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \text{ (단, } D = b^2 - 4ac \text{)}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\alpha - \beta| &= \left| \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{-b + \sqrt{D} + b + \sqrt{D}}{2a} \right| \\ &= \left| \frac{2\sqrt{D}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \end{aligned}$$

4. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -\frac{1}{2}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 8 - 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = 11$$

5. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.

두 근의 합 : 2,

두 근의 곱 : 2

$\therefore a = -2, b = 2$

6. 복소수 z 와 그 켤레복소수 \bar{z} 에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z + \bar{z} = 4, \quad z \cdot \bar{z} = 7$$

- ① $z = 1 \pm \sqrt{3}i$ ② $z = 2 \pm \sqrt{3}i$ ③ $z = 3 \pm \sqrt{3}i$
④ $z = 1 \pm 2\sqrt{3}i$ ⑤ $z = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

해설

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ z + \bar{z} &= 2a = 4, z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = 7 \\ \therefore a &= 2, b = \pm \sqrt{3} \\ \therefore z &= 2 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

7. $2|x-1|+x-4=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 2

▷ 정답: -2

해설

i) $x < 1$ 일 때,
 $-2(x-1) + (x-4) = 0$
 $\therefore x = -2$

ii) $x \geq 1$ 일 때,
 $2(x-1) + x - 4 = 0$
 $\therefore x = 2$

따라서 구하는 해는 $x = -2$ 또는 $x = 2$ 이다.

8. x 의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c 의 값의 합을 구하여라.

$$x^3 + 1 = (x-1)(x-2)(x-3) + a(x-1)(x-2) + b(x-1) + c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x 에 대한 항등식이므로

$$x = 1 \text{ 일 때, } 2 = c \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } 9 = b + c \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } 28 = 2a + 2b + c \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $a = 6, b = 7, c = 2$

$$\therefore a + b + c = 15$$

9. x 의 다항식 $x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때, 나머지가 $2x + 1$ 이 되도록 상수 a, b 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 + ax + b$ 를 $x^2 - 3x + 2$ 로 나눌 때,
몫을 $x + q$ 라 하면 (일반적으로 $px + q$ 로 해야겠지만 x^3 의 계수가 1이므로 $x + q$)

$$x^3 + ax + b = (x^2 - 3x + 2)(x + q) + 2x + 1$$

$$\therefore x^3 + ax + b = (x - 2)(x - 1)(x + q) + 2x + 1$$

이 등식은 x 에 관한 항등식이므로

$$x = 1 \text{을 대입하면 } 1 + a + b = 2 + 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x = 2 \text{를 대입하면 } 8 + 2a + b = 4 + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -5, b = 7$$

$$\therefore a + b = 2$$

10. x 에 대한 다항식 $(ax - 1)^3$ 의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x = 1$ 을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

$$\text{즉, } (a - 1)^3 = 125, a - 1 = 5$$

$$\therefore a = 6$$

11. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 는 $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$ 을 만족한다. $f(x)$ 를 $x-4$ 로 나누었을 때 나머지는?

- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 2

해설

$$f(1) = 1 + a + b + c = 2$$

$$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$$

$$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$$

세 식을 연립하면,

$$a = -6, b = 13, c = -6$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$$

$$\therefore f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$$

12. 이차 이상의 다항식 $p(x)$ 를 $x - 2007$ 와 $x - 2008$ 으로 나눈 나머지는 각각 2007와 2008이다. $p(x)$ 를 $(x - 2007)(x - 2008)$ 으로 나눈 나머지는?

- ① 2007×2008 ② $2007x$
③ $2008x$ ④ $x - 2007 \times 2008$

⑤ x

해설

$p(x)$ 를 $(x - 2007)(x - 2008)$ 으로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $q(x)$ 와 $ax + b$ 라 놓으면
 $p(x) = (x - 2007)(x - 2008)q(x) + ax + b \cdots \cdots \text{㉠}$
나머지정리에 의해
 $p(2007) = 2007, p(2008) = 2008$ 이므로
㉠의 x 에 2007와 2008을 대입하면
 $2007a + b = 2007, 2008a + b = 2008$
 $\therefore a = 1, b = 0$
그러므로 구하는 나머지는 x

13. 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 - 4$ 로 나누었을 때의 나머지가 $-x + 4$ 이다. 다항식 $f(x+1)$ 을 $x^2 + 2x - 3$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

- ① $2x + 1$ ② $-x + 3$ ③ $x - 1$
④ $2x$ ⑤ $2x - 3$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 4)P(x) - x + 4 \\ &= (x+2)(x-2)P(x) - x + 4 \\ \therefore f(-2) &= 6, f(2) = 2 \\ f(x+1) &= (x^2 + 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x+3)(x-1)Q(x) + ax + b \\ x = -3 \text{을 대입하면 } f(-2) &= -3a + b = 6 \\ x = 1 \text{을 대입하면 } f(2) &= a + b = 2 \\ \therefore a &= -1, b = 3 \\ \text{따라서 나머지는 } &-x + 3 \end{aligned}$$

14. x 에 대한 다항식 $x^3 + 2x^2 - ax + b$ 가 $x^2 + x - 2$ 로 나누어 떨어질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - ax + b = (x^2 + x - 2)Q(x) \\ = (x + 2)(x - 1)Q(x)$$

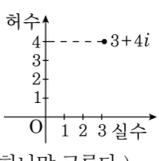
인수정리에 의해 $x = -2, x = 1$ 을 대입하면 우변이 0이 된다.

$$\therefore f(-2) = -8 + 8 + 2a + b = 0$$

$$f(1) = 1 + 2 - a + b = 0 \text{ 연립하면, } a = 1, b = -2$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

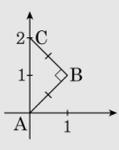
15. 복소수 $z = a + bi$ (a, b 는 실수)를 실수의 순서쌍 (a, b) 로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$ 를 $(3, 4)$ 로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z = 1 + i$ 일 때, $0, z, z^2$ 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



- ① 정삼각형 ② 이등변삼각형
③ 직각삼각형 ④ 직각이등변삼각형
⑤ 답 없음

해설

$$z = 1 + i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1, 1), C(0, 2)$$



⇒ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

16. 등식 $(x + yi)(z - i) = 10$ 을 만족하는 자연수 x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수를 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답: 개

▷ 정답: 3개

해설

$(xz + y) + (yz - x)i = 10$
 $xz + y = 10 \cdots \text{㉠}, yz - x = 0 \cdots \text{㉡}$
㉡을㉠에 대입
 $y(z^2 + 1) = 10$
 z 를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면
 $(5, 5, 1), (4, 2, 2), (3, 1, 3)$ 3개

17. $4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$

② 3

③ $4i$

④ 5

⑤ $1+3i$

해설

$$\begin{aligned} & 4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i} \\ &= 4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i} \\ &= 4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= 4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3 \end{aligned}$$

18. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

- ① $-2i$ ② $2i$ ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ i

해설

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i}{1-i}\right) &= i, \left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -i \text{이고 } i^4 = 1 \\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005} \\ &= i^{2004} + (-i)^{2005} \\ &= i^{4 \times 501} + (-i)^{4 \times 501} \times (-i) \\ &= 1 + (-i) \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

19. $a = 1 + i$, $b = 1 - i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$a^2 = (1 + i)^2 = 2i, \quad b^2 = (1 - i)^2 = -2i,$$

$$ab = (1 + i)(1 - i) = 2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{ab} + \left(\frac{1}{b}\right)^2 &= \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2} \\ &= \frac{-2i + 2 + 2i}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

20. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$ (단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha + \overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2, \overline{\alpha} = 2$

21. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha + \beta = 2008i$ 일 때, $\bar{\alpha} + \beta$ 의 값은? (단, $\bar{\alpha}$ 는 α 의 켈레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008

② -2008

③ $2008i$

④ $-2008i$

⑤ 일정하지 않다.

해설

켈레복소수의 성질에서

$\alpha + \beta = 2008i$ 일 때

$\overline{\alpha + \beta} = \overline{2008i}$

$\bar{\alpha} + \beta = -2008i$

22. 두 실수 x, y 가 $x+y = -5$, $xy = 2$ 를 만족할 때, $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ 의 값을 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x+y = -5$, $xy = 2$ 에서 $x < 0$, $y < 0$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

23. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$
i) $a=1$ 일 때, $0 \cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.
ii) $a=0$ 이면 $0 \cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.
iii) $a \neq 0, a \neq 1$ 일 때, $x = \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}$
따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0이다.

24. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \pm 1$

② $0, \pm 2$

③ $\pm 1, \pm 2$

④ $\pm 2, \pm 3$

⑤ $\pm 3, \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$ 에서
 $x \geq 0$ 일 때,
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x-2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 2, \text{ 또는 } x = 3$
(ii) $x < 0$ 일 때,
 $x^2 + 5x + 6 = 0$
 $(x+2)(x+3) = 0$
 $\therefore x = -2, \text{ 또는 } x = -3$
(i), (ii)에서 $x = \pm 2, x = \pm 3$

25. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 두 근이 3, b 일 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$ 이 $x^2 - ax + 12 = 0$ 의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 에서 $(x - 3)(x - 4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore b = 4 \quad \therefore ab = 28$

26. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + 2bx + 3a = 0$ 를 동시에 만족하는 x 는 -1 밖에 없을 때, 상수 ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$x = -1$ 은 두 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$,
 $x^2 + 2bx + 3a = 0$ 의 공통근이므로
 $1 - a + b = 0$, $1 - 2b + 3a = 0$
두 식을 연립하여 풀면
 $a = -3$, $b = -4$
 $\therefore ab = 12$

27. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

- ① 오직 한 실근을 갖는다.
- ② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 실근을 갖는다.
- ⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \frac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$$

\therefore 주어진 방정식은 실근을 갖는다

28. x 에 관한 이차방정식 $(m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 m 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(m^2 - 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3 = 0$$

(i) 이차방정식이므로 $m^2 - 1 \neq 0$

$\therefore m \neq 1, -1$

(ii) 중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (m - 1)^2 - 3(m^2 - 1) = 0$$

$$m^2 - 2m + 1 - 3m^2 + 3 = 0$$

$$m^2 + m - 2 = 0$$

$$(m + 2)(m - 1) = 0$$

$\therefore m = 1, -2$

\therefore (i)과 (ii)에서 $m = -2$ 일 때만 중근을 갖는다.

29. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, a, b, c 는 서로 다른 양의 실수이다.)

- ① 서로 다른 두 허근
- ② 서로 다른 두 실근
- ③ 서로 같은 두 실근
- ④ 서로 다른 두 허근
- ⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

30. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k+a)x + (k^2 + 4k - 2b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a-b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$$D' = (k+a)^2 - (k^2 + 4k - 2b) = 0$$

$$(2a-4)k + a^2 + 2b = 0$$

모든 k 에 대해서 성립하려면,

$$2a-4 = 0 \text{ 이고 } a^2 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 4$$

31. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 a, b, c 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

- ① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형
- ③ $a = b$ 인 이등변삼각형
- ④ $b = c$ 인 이등변삼각형
- ⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,
 $(a-c)x^2 + 2bx + a + c$
위의 식이 완전제곱식이 되려면
 $D = 0$ 이어야 하므로
 $\frac{D}{4} = b^2 - (a-c)(a+c) = 0,$
즉 $b^2 - a^2 + c^2 = 0$
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2$
따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

32. 이차방정식 $ix^2 + (2+i)x - i(1+i) = 0$ 의 두 근의 합은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $-1 - 2i$

② $1 - i$

③ $-1 + i$

④ $-1 + 2i$

⑤ $3i$

해설

주어진 양 방정식에 i 를 곱하면

$$-x^2 + (2i-1)x - i(i-1) = 0$$

$$x^2 - (2i-1)x + i(i-1) = 0$$

$$(x-i)(x+1-i) = 0$$

$$\therefore x = i \text{ 또는 } x = -1 + i$$

두 근의 합은 $-1 + 2i$

33. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, x 에 대한 이차방정식 $x^2 - bx + a = 0$ 의 두 근을 $\alpha + 1, \beta + 1$ 이라 한다. 이 때, 상수 a, b 의 곱은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b \dots \textcircled{1}$
또, $x^2 - bx + a = 0$ 의 두 근이 $\alpha + 1, \beta + 1$ 이므로
 $(\alpha + 1) + (\beta + 1) = b, (\alpha + 1)(\beta + 1) = a$
즉, $\alpha + \beta + 2 = b, \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = a \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $-a + 2 = b, b - a + 1 = a$
 $\therefore a = 1, b = 1$
 $\therefore ab = 1$

34. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2 - 6x + 4 = 0$

② $x^2 - 3x + 4 = 0$

③ $x^2 + 6x + 5 = 0$

④ $x^2 + 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 4x + 5 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$

두 근의 합 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 3 + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 3 + 3 = 6$$

두 근의 곱 : $\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)$

$$= \alpha\beta + 1 + 1 + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = 4$$

\therefore 방정식은 $x^2 - 6x + 4 = 0$

35. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2 + 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x + 1 + 2i)$

③ $x^2 + 4 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $2x^2 + 4x - 5 = \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right) \left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1 = 3 \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$

③ $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

④ $2x^2 + 4x - 5$

$= 2 \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right) \left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1$

$= 3 \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

36. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 을 풀 때, a 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, b 를 잘못 보아 -2, 5를 얻었다. 이 때, 옳은 두 근은?

- ① $x = -1$ 또는 $x = -2$ ② $x = -1$ 또는 $x = 2$
③ $x = 0$ 또는 $x = 2$ ④ $x = 1$ 또는 $x = 2$
⑤ $x = 2$ 또는 $x = 3$

해설

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 에서
(i) 처음에는 x 의 계수 a 를 잘못 보고,
상수항 b 를 바르게 보았으므로, 두 근 $\frac{1}{2}$, 4의 곱은 옳다.
따라서 $b = 2$
(ii) 두 번째는 상수항 b 를 잘못 보고, x 의 계수 a 를 바르게
보았으므로
두 근 -2, 5의 합은 옳다.
따라서 $a = 3$,
 \therefore 주어진 이차방정식은
 $x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

37. 복소수 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$$(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$$

$$= \left(\frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 1 + \sqrt{3}i}{2} \right)^2$$

$$+ \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i - 3 + 3\sqrt{3}i}{2} \right)^2$$

$$= (-2 - \sqrt{3}i)^2 + (-2 + \sqrt{3}i)^2$$

$$= 4 + 4\sqrt{3}i - 3 + 4 - 4\sqrt{3}i - 3 = 2$$

해설

$$z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3}i)^2}{(1 - \sqrt{3}i)(1 + \sqrt{3}i)}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z + 1 = \sqrt{3}i$ 양변을 제곱하면

$$4z^2 + 4z + 1 = -3$$

$$\rightarrow 4z^2 + 4z + 4 = 0$$

$$\rightarrow z^2 + z + 1 = 0$$

$$\rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\rightarrow z^3 - 1 = 0$$

$$\rightarrow z^3 = 1$$

※ 방정식에 익숙한 학생들은

$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2 + z + 1 = 0$ 와 $z^3 = 1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$$(3z^2 + z)^2 + (z^2 + 3z)^2$$

$$= 10z^4 + 12z^3 + 10z^2$$

$$= (10z^4 + 10z^3 + 10z^2) + 2z^3$$

$$= 10z^2(z^2 + z + 1) + 2z^3$$

$$= 0 + 2$$

$$= 2$$

38. x 에 관한 다항식 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이고, $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 를 $(x^2 + 1)(x - 1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax^2 + bx + c$ (단, a, b, c 는 상수)라고 하면,

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

그런데 $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나누면 나머지가 $x + 1$ 이므로

$$f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)Q(x) + a(x^2 + 1) + (x + 1)$$

또 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나누면 나머지가 4이므로

$$f(1) = 2a + 2 = 4 \text{에서 } a = 1$$

$$\text{따라서 } ax^2 + bx + c = a(x^2 + 1) + x + 1 = x^2 + x + 2$$

\therefore 구하는 나머지의 상수항은 2

39. 세 방정식 $x^2 + 2ax + bc = 0$, $x^2 + 2bx + ca = 0$, $x^2 + 2cx + ab = 0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c 는 실수)

- ① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.
- ② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.
- ③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.
- ④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.
- ⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - bc,$$

$$\frac{D_2}{4} = b^2 - ca,$$

$$\frac{D_3}{4} = c^2 - ab \text{라 하면}$$

$$\frac{D_1}{4} + \frac{D_2}{4} + \frac{D_3}{4}$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \geq 0$$

따라서, $\frac{D_1}{4}, \frac{D_2}{4}, \frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

40. 정수 a, b 에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

- ① 무리수이다.
- ② 정수가 아닌 유리수이다.
- ③ 정수이다.
- ④ 홀수인 자연수이다.
- ⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta + \gamma = -a \text{ (정수)}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -b$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = a^2 \text{ (정수)}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b \text{ (정수)}$$

그러나 $a > 0, b > 0$ 이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 은 자연수가 되지 않는다.