1. 다음 등식이 x에 대한 항등식이 되도록 실수 a, b, c의 값을 구하여라.

$$ax^2 - x + c - 3 = 2x^2 - bx - 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

▷ 정답 : $b = 1$

▷ 정답 : $c = 1$

해설

각 항의 계수를 서로 비교한다.

2. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+6=0$의 근을 구하면 $x=a\pm\sqrt{b}i$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x^2-4x+6=0$
근의 공식을 이용하면 $x=2\pm\sqrt{4-6}=2\pm\sqrt{2}i$
$\therefore a=b=2,\quad a+b=4$

3. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하고 판별식을 D라고 할 때 $|\alpha-\beta|$는 다음 중 어느 것과 같은가?

① $\dfrac{\sqrt{D}}{a}$　② $\dfrac{-\sqrt{D}}{a}$　③ $\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$

④ $-\dfrac{\sqrt{D}}{|a|}$　⑤ $-\dfrac{D}{|a|}$

해설

근의 공식을 이용하여 풀면

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

즉 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ (단, $D=b^2-4ac$)

$$\therefore |\alpha-\beta|=\left|\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{-b+\sqrt{D}+b+\sqrt{D}}{2a}\right|$$

$$=\left|\frac{2\sqrt{D}}{2a}\right|=\frac{\sqrt{D}}{|a|}$$

4. 이차방정식 $2x^2 - 4x - 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 11

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\alpha^3 + \beta^3 &= (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\ &= 8 - 3 \times (-\frac{1}{2}) \times 2 = 11\end{aligned}$$

5. 한 근이 $1-i$ 인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 일 때, 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

한 근이 $1-i$ 이면 다른 한 근은 $1+i$ 이다.

두 근의 합 : 2,

두 근의 곱 : 2

$\therefore \quad a=-2\ , \quad b=2$

6. 복소수 z와 그 켤레복소수 $\bar{z}$에 대하여 다음을 만족하는 z 를 구하면?

$$z+\bar{z}=4, \quad z\cdot\bar{z}=7$$

① $z=1\pm\sqrt{3}i$ ② $z=2\pm\sqrt{3}i$ ③ $z=3\pm\sqrt{3}i$

④ $z=1\pm2\sqrt{3}i$ ⑤ $z=2\pm2\sqrt{3}i$

해설

$z=a+bi$

$z+\bar{z}=2a=4, z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=7$

$\therefore a=2, b=\pm\sqrt{3}$

$\therefore z=2\pm\sqrt{3}i$

7. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x-4)=0$

$\therefore x=-2$

ii) $x\geq 1$일 때,

$2(x-1)+x-4=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

8. x의 모든 값에 대하여 다음 등식이 성립할 때, 상수 a, b, c의 값의 합을 구하여라.

$$x^3+1=(x-1)(x-2)(x-3)+a(x-1)(x-2)+b(x-1)+c$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

x에 대한 항등식이므로

$x=1$일 때, $2=c\cdots\cdots$ ㉠

$x=2$일 때, $9=b+c\cdots\cdots$ ㉡

$x=3$일 때, $28=2a+2b+c\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=6,\ b=7,\ c=2$

$\therefore\ a+b+c=15$

9. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 $a,\ b$의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,

몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)

$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$

$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$

이 등식은 x에 관한 항등식이므로

$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$㉠

$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$

$\therefore\ a+b=2$

10. x에 대한 다항식 $(ax-1)^3$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합이 125일 때, 실수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x=1$을 대입하면 계수들의 합을 얻을 수 있다.

즉, $(a-1)^3=125, a-1=5$

$\therefore\ a=6$

11. 삼차식 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$는 $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f(3) = 6$을 만족한다. $f(x)$를 $x - 4$로 나누었을 때 나머지는?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 2

해설

$f(1) = 1 + a + b + c = 2$

$f(2) = 8 + 4a + 2b + c = 4$

$f(3) = 27 + 9a + 3b + c = 6$

세 식을 연립하면,

$a = -6, b = 13, c = -6$

$\therefore\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 6$

$\therefore\ f(4) = 64 + 16 \times (-6) + 4 \times 13 - 6 = 14$

12. 이차 이상의 다항식 $p(x)$를 $x-2007$와 $x-2008$으로 나눈 나머지는 각각 2007와 2008이다. $p(x)$를 $(x-2007)(x-2008)$으로 나눈 나머지는?

① 2007×2008

② $2007x$

③ $2008x$

④ $x-2007 \times 2008$

⑤ x

해설

$p(x)$를 $(x-2007)(x-2008)$으로 나눌 때의 몫과 나머지를 각각 $q(x)$와 $ax+b$라 놓으면

$p(x)=(x-2007)(x-2008)q(x)+ax+b \cdots\cdots$ ㉠

나머지정리에 의해

$p(2007)=2007,\ p(2008)=2008$이므로

㉠의 x에 2007와 2008을 대입하면

$2007a+b=2007,\ 2008a+b=2008$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

그러므로 구하는 나머지는 x

13. 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 나머지가 $-x+4$이다. 다항식 $f(x+1)$을 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① $2x+1$ ② $-x+3$ ③ $x-1$

④ $2x$ ⑤ $2x-3$

해설

$$f(x)=(x^2-4)P(x)-x+4$$
$$=(x+2)(x-2)P(x)-x+4$$
$$\therefore\ f(-2)=6,\ f(2)=2$$
$$f(x+1)=(x^2+2x-3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+3)(x-1)Q(x)+ax+b$$

$x=-3$을 대입하면 $f(-2)=-3a+b=6$

$x=1$을 대입하면 $f(2)=a+b=2$

$\therefore\ a=-1,\ b=3$

따라서 나머지는 $-x+3$

14. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)$$

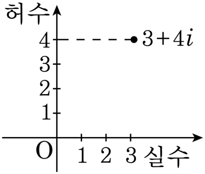
인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$

$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

15. 복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)를 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$로 나타내어 좌표평면 위에 표시할 수 있다. 예를 들어 $3+4i$를 $(3,\ 4)$로 나타내면 다음 그림과 같이 표시할 수 있다. $z=1+i$일 때, 0, z, z^2 이 나타내는 점을 각각 A, B, C 라 할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가? (단, 가장 정확하게 표시한 것을 하나만 고른다.)



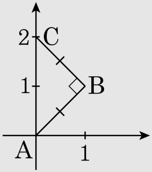
① 정삼각형　　② 이등변삼각형

③ 직각삼각형　　④ 직각이등변삼각형

⑤ 답 없음

해설

$z = 1+i \quad z^2 = 2i \Rightarrow \quad B(1,\ 1),\ C(0,\ 2)$



$\Rightarrow$ 직각이등변삼각형

※ 이와 같이 복소수의 실수부와 허수부를 순서쌍으로 좌표평면에 나타내는 것을 복소평면이라 한다.

16. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ **답:** ______ 개

▷ **정답:** 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5, 5, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(3, 1, 3)$ 3개

17. $4-3i+\dfrac{3-5i}{1+i}+4i+\dfrac{-3+5i}{1+i}-\dfrac{2}{1-i}$ 를 간단히 한 것은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-i$ ② 3 ③ $4i$

④ 5 ⑤ $1+3i$

해설

$$4-3i+\frac{3-5i}{1+i}+4i+\frac{-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$$

$$=4-3i+4i+\frac{3-5i-3+5i}{1+i}-\frac{2}{1-i}$$

$$=4+i-\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

$$=4+i-\frac{2(1+i)}{1+1}=4+i-1-i=3$$

18. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$ 를 간단히 하면?

① $-2i$ ② $2i$ ③ $1+i$ ④ $1-i$ ⑤ i

해설

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)=i$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=-i$ 이고 $i^4=1$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2004}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2005}$$
$$=i^{2004}+(-i)^{2005}$$
$$=i^{4\times 501}+(-i)^{4\times 501}\times(-i)$$
$$=1+(-i)$$
$$=1-i$$

19. $a=1+i$, $b=1-i$ 일 때, $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$a^2=(1+i)^2=2i,\ b^2=(1-i)^2=-2i$,

$ab=(1+i)(1-i)=2$

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2+\frac{1}{ab}+\left(\frac{1}{b}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{a^2b^2}=\frac{-2i+2+2i}{4}=\frac{1}{2}$$

20. 복소수 α, β 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\overline{\alpha+\beta} = \overline{\alpha}+\overline{\beta}$

② $\overline{\alpha^n} = (\overline{\alpha})^n$

③ $\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)} = \dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$(단, $\alpha \neq 0$)

④ $\overline{(\overline{\alpha})} = \alpha$

⑤ $\alpha+\overline{\alpha} = \alpha\overline{\alpha}$ 이면 α 는 허수이다.

해설

⑤ (반례) $\alpha = 2,\ \overline{\alpha} = 2$

21. 두 복소수 α, β 에 대하여 $\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때, $\overline{\alpha}+\beta$ 의 값은? (단, $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① 2008
② -2008
③ $2008i$
④ $-2008i$
⑤ 일정하지 않다.

해설

켤레복소수의 성질에서

$\alpha+\overline{\beta}=2008i$ 일 때

$\overline{\alpha+\overline{\beta}}=\overline{2008i}$

$\overline{\alpha}+\beta=-2008i$

22. 두 실수 $x,\ y$가 $x+y=-5,\ xy=2$를 만족할 때, $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}$의 값을 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ ④ $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x+y=-5,\ xy=2$에서 $x<0,\ y<0$이다.

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} \\ &= \frac{x+y}{-\sqrt{xy}} \\ &= \frac{-5}{-\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

23. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a의 값은 0이다.

24. 다음 방정식의 해는?

$$x^2 - 5|x| + 6 = 0$$

① $0, \ \pm 1$ ② $0, \ \pm 2$ ③ $\pm 1, \ \pm 2$

④ $\pm 2, \ \pm 3$ ⑤ $\pm 3, \ \pm 4$

해설

(i) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$에서

$x \geq 0$일 때,

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$, 또는 $x = 3$

(ii) $x < 0$일 때,

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$(x+2)(x+3) = 0$

$\therefore x = -2$, 또는 $x = -3$

(i), (ii)에서 $x = \pm 2, \ x = \pm 3$

25. 이차방정식 $x^2 - ax + 12 = 0$의 두 근이 3, b일 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$x = 3$이 $x^2 - ax + 12 = 0$의 근이므로

$9 - 3a + 12 = 0 \quad \therefore \ a = 7$

이 때 $x^2 - 7x + 12 = 0$에서 $(x-3)(x-4) = 0$

그러므로 $x = 3$ 또는 $x = 4$

$\therefore \ b = 4 \quad \therefore \ ab = 28$

26. $x^2+ax+b=0,\ x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0$,
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0,\ 1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=-4$
$\therefore ab=12$

27. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(ⅰ) $a=0$ 일 때 : $x=\dfrac{a+2}{2}$

(ⅱ) $a\neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D'=1+a(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

28. x에 관한 이차방정식 $(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$이 중근을 갖도록 하는 m의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(m^2-1)x^2-2(m-1)x+3=0$

(i) 이차방정식이므로 $m^2-1\neq 0$

$\therefore\ m\neq 1, -1$

(ii) 중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=(m-1)^2-3(m^2-1)=0$$

$m^2-2m+1-3m^2+3=0$

$m^2+m-2=0$

$(m+2)(m-1)=0$

$\therefore\ m=1, -2$

$\therefore$(i)과 (ii)에서 $m=-2$일 때만 중근을 갖는다.

29. $x^2+2\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}x+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}=0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2-\frac{1}{\sqrt{ab}}-\frac{1}{\sqrt{bc}}-\frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\}>0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

30. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k^2+4k-2b)=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$D' = (k+a)^2-(k^2+4k-2b)=0$

$(2a-4)k+a^2+2b=0$

모든 k에 대해서 성립하려면,

$2a-4=0$이고 $a^2+2b=0$

$\therefore\ a=2, \quad b=-2$

$\therefore\ a-b=4$

31. x 에 관한 이차식 $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)$ 에서 $a,\ b,\ c$ 가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, 이 이차식이 x 에 관한 완전제곱식이 되는 것은 이 삼각형이 어떠한 삼각형일 때인가?

① a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

② c 를 빗변으로 하는 직각삼각형

③ $a=b$ 인 이등변삼각형

④ $b=c$ 인 이등변삼각형

⑤ 정삼각형

해설

준식을 정리하면,

$(a-c)x^2+2bx+a+c$

위의 식이 완전제곱식이 되려면

$D=0$ 이어야 하므로

$\frac{D}{4}=b^2-(a-c)(a+c)=0,$

즉 $b^2-a^2+c^2=0$

$\therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서, a 를 빗변으로 하는 직각삼각형

32. 이차방정식 $ix^2+(2+i)x-i(1+i)=0$의 두 근의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $-1-2i$ ② $1-i$ ③ $-1+i$

④ $-1+2i$ ⑤ $3i$

해설

주어진 양 방정식에 i 를 곱하면

$-x^2+(2i-1)x-i(i-1)=0$

$x^2-(2i-1)x+i(i-1)=0$

$(x-i)(x+1-i)=0$

$\therefore x=i$ 또는 $x=-1+i$

두 근의 합은 $-1+2i$

33. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 $\alpha+1$, $\beta+1$이라 한다. 이 때, 상수 a, b의 곱은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b\cdots\cdots$㉠

또, $x^2-bx+a=0$ 의 두 근이 $\alpha+1$, $\beta+1$이므로

$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$

즉, $\alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a\cdots\cdots$㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+2=b,\ b-a+1=a$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore ab=1$

34. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2-6x+4=0$
② $x^2-3x+4=0$
③ $x^2+6x+5=0$
④ $x^2+4x+5=0$
⑤ $x^2-4x+5=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 α,β이므로 $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

두 근의 합 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=3+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+3=6$

두 근의 곱 : $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)$

$=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=4$

$\therefore$ 방정식은 $x^2-6x+4=0$

35. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2+4x+1=(x-2-\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1+2i)(x+1+2i)$

③ $x^2+4=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $2x^2+4x-5=\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2+4x+1=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$

③ $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$

④ $2x^2+4x-5$

$$=2\left(x-\frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$$

⑤ $3x^2-6x+1$

$$=3\left(x-\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$$

36. x에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$을 풀 때, a를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, b를 잘못 보아 -2, 5를 얻었다. 이 때, 옳은 두 근은?

① $x = -1$ 또는 $x = -2$

② $x = -1$ 또는 $x = 2$

③ $x = 0$ 또는 $x = 2$

④ $x = 1$ 또는 $x = 2$

⑤ $x = 2$ 또는 $x = 3$

해설

이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$에서

(i) 처음에는 x의 계수 a를 잘못 보고,

상수항 b를 바르게 보았으므로, 두 근 $\frac{1}{2}$, 4의 곱은 옳다.

따라서 $b = 2$

(ii) 두 번째는 상수항 b를 잘못 보고, x의 계수 a를 바르게 보았으므로

두 근 -2, 5의 합은 옳다.

따라서 $a = 3$,

$\therefore$ 주어진 이차방정식은

$x^2 - 3x + 2 = 0$, $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore$ $x = 1$ 또는 $x = 2$

37. 복소수 $z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 에 대하여 $(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$$= \left(\frac{-3-3\sqrt{3}i-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1-\sqrt{3}i-3+3\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

$= (-2-\sqrt{3}i)^2+(-2+\sqrt{3}i)^2$

$= 4+4\sqrt{3}i-3+4-4\sqrt{3}i-3 = 2$

해설

$$z = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

에서 양변에 2를 곱하고 -1 을 우변으로 이항하면 $2z+1 = \sqrt{3}i$
양변을 제곱하면

$4z^2+4z+1 = -3$

$\rightarrow 4z^2+4z+4 = 0$

$\rightarrow z^2+z+1 = 0$

$\rightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0$

$\rightarrow z^3-1 = 0$

$\rightarrow z^3 = 1$

※방정식에 익숙한 학생들은

$z = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서 바로 $z^2+z+1=0$ 와 $z^3=1$ 을 도출할 수 있을 것이다.

$(3z^2+z)^2+(z^2+3z)^2$

$= 10z^4+12x^3+10z^2$

$= (10z^4+10z^3+10z^2)+2z^3$

$= 10z^2(z^2+z+1)+2z^3$

$= 0+2$

$= 2$

38. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이고, $x-1$로 나누면 나머지가 4이다. 이 다항식 $f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나눌 때의 나머지의 상수항을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$를 $(x^2+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(단, a, b, c는 상수) 라고 하면,

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

그런데 $f(x)$를 x^2+1로 나누면 나머지가 $x+1$이므로

$f(x)=(x^2+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+1)+(x+1)$

또 $f(x)$를 $x-1$로 나누면 나머지가 4이므로

$f(1)=2a+2=4$에서 $a=1$

따라서 $ax^2+bx+c=a(x^2+1)+x+1=x^2+x+2$

$\therefore$ 구하는 나머지의 상수항은 2

39. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$ 의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\dfrac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\dfrac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\dfrac{D_1}{4}+\dfrac{D_2}{4}+\dfrac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\dfrac{D_1}{4}$, $\dfrac{D_2}{4}$, $\dfrac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

40. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다. ② 정수가 아닌 유리수이다.

③ 정수이다. ④ 홀수인 자연수이다.

⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a$(정수) , $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$

$= a^2$(정수)

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b$(정수)

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.