

1. 길이가 6인 선분을 같은 방향으로 2:1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6인 선분을 OA라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A의 좌표는 (6, 0)
이 선분을 2:1로 내분하는 점 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2:1로 외분하는 점 Q(x_2)라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $PQ = 12 - 4 = 8$

2. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 (a, b) 와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

(a, b) 가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점 (a, b) 와 직선 사이의 거리를 l 이라 하면,

$$a = b^2 + 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$l = \frac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \dots\dots \textcircled{2}$$

①를 ②에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore b = \frac{1}{2}$ 일 때 l 이 최소가 된다.

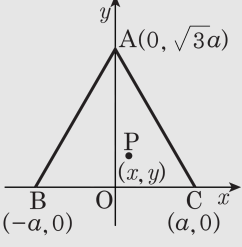
따라서 $a + b = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\therefore 4(a + b) = 7$$

3. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?
- ① 삼각형 ② 직선 ③ 선분
 ④ 원 ⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $C(a, 0)$ 이라고 두면, $B(-a, 0)$, $A(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$$2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{ 이므로}$$

$$2\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\}$$

$$= (x + a)^2 + y^2 + (x - a)^2 + y^2$$

$$\text{정리하여 간단히 하면, } y = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

∴ 직선

4. 점 A(-2, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

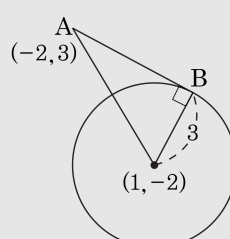
해설

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

원의 중심은 (1, -2), 반지름은 3 이므로

$$AB = \sqrt{(3^2 + (-5)^2) - 3^2} = 5$$



5. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 30u

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

6. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1 \times 4 - 2 \times 1}{1 - 2}, \frac{1 \times 0 - 2 \times 3}{1 - 2}\right)$, 즉 (-2, 6)

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 (-2, 6) 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2)$, $y = x + 8$

$a = 1$, $b = 8$ $\therefore a + b = 9$

7. 세 점 $O(0, 0)$, $A(4, 3)$, $B(-2, 6)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle OAB$ 의 넓이는?

① 9

② 10

③ 12

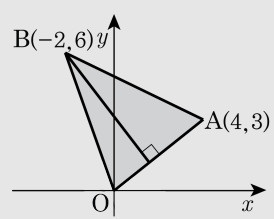
④ 15

⑤ 18

해설

$\overline{OA} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ 이고 직선 OA 의

방정식은 $y = \frac{3}{4}x$



즉 $3x - 4y = 0$ 이므로 점 $B(-2, 6)$ 과

직선 OA 사이의 거리는

$$\frac{|3 \times (-2) - 4 \times 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{30}{5} = 6$$

따라서 $\triangle OAB$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 6 = 15$

8. 두 점 A (-3, 8), B (7, -4) 를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$ ② $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 32$

③ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 7$ ④ $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 22$

⑤ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$

해설

구하는 원의 중심을 C 라고 하면

C 는 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$C\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{8-4}{2}\right)$$

$\therefore C(2, 2)$

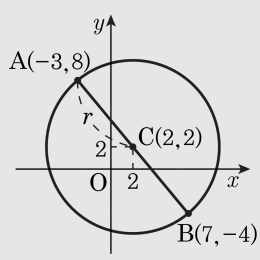
반지름의 길이를 r 라고 하면

r 는 $\overline{AB}$ 의 길이의 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$r = \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{(2+3)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{61}$$

따라서, 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 61$$

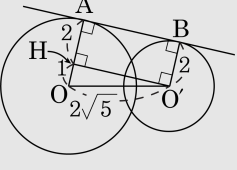


9. 두 원 $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0, x^2 + y^2 = 9$ 의 공통외접선의 길이는?

- ① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0$ 에서
 $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
두 원의 중심 $(-2, 4)$ 와 $(0, 0)$ 에 대하여
중심거리
 d 는 $d = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
두 원의 반지름의 길이는 각각 2, 3 이므
로,
접점을 각각 A, B 라 하고 점 O' 에서
 $\overline{OA}$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면
공통 외접선의 길이 $\overline{AB}$ 는
 $\overline{AB} = \overline{O'H} = \sqrt{20 - (3 - 2)^2} = \sqrt{19}$



10. 좌표평면 위의 두 점 $A(8, 0)$, $B(0, 6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.

$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

$a = -8, b = -6, c = 0$

$\therefore abc = 0$

11. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

12. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ 을 x 축 방향으로 a , y 축방향으로 b 만큼 평행이동하여 원점이 원의 중심이 되었다. 이때, 이와 같은 이동에 의하여 점 $(2, 5)$ 은 어느 점으로 옮겨지는가?

- ① $(0, 9)$ ② $(1, 3)$ ③ $(1, 8)$
④ $(3, 5)$ ⑤ $(4, 4)$

해설

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
 $\Rightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9 \rightarrow$ 중심 : $(1, -3)$
 $\therefore$ 원점이 중심이 되려면
 x 축으로 -1 , y 축으로 3 만큼 평행 이동해야 한다.
 $\Rightarrow (2-1, 5+3) \rightarrow (1, 8)$

13. 포물선 $y = -x^2 - 2x$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동한 포물선의 꼭짓점의 좌표는?

㉠ $(-1, 2)$

㉡ $(-1, -1)$

㉢ $(-1, 1)$

㉣ $(1, 2)$

㉤ $(1, 1)$

해설

x 축 대칭은 $y \rightarrow -y$ 를 대입하고, y 축 평행이동은 $y \rightarrow y - 3$ 을 대입하면,

$$y = x^2 + 2x + 3$$

$$= (x + 1)^2 + 2$$

14. 세 점 A(-1, 1), B(3, 1), C(4, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심을 O(a, b)라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 O에서 세 점 A(-1, 1), B(3, 1), C(4, 2)에 이르는 거리는 같으므로

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 \text{에서 } 2a + 1 = -6a + 9$$

$$\therefore a = 1$$

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 \text{에서 } -2b + 5 = -4b + 13$$

$$\therefore b = 4$$

$$\text{그러므로 } a + b = 5$$

15. 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 M이라하자. 두 점 A,C의 좌표는 각각 A(-2,6),C(4,0)이고, 삼각형 MBC의 무게중심은 원점이다. 점 D의 좌표를 (a,b) 라고 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

점 M은 선분 AC의 중점이므로

M의 좌표는 $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (1,3)$.

삼각형 MBC의 무게중심은 원점이므로

점 B의 좌표를 (c,d) 라고 하면

$$\frac{1+c+4}{3} = 0 \text{에서 } c = -5$$

$$\frac{3+d+0}{3} = 0 \text{에서 } d = -3$$

따라서 점 B의 좌표는 $(-5,-3)$ 이다. 점 M은 선분 BD의 중점

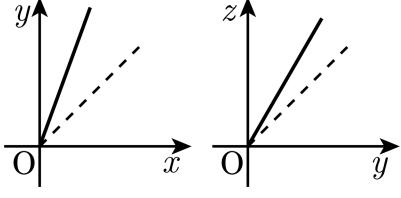
이므로

$$\frac{-5+a}{2} = 1 \text{에서 } a = 7$$

$$\frac{-3+b}{2} = 3 \text{에서 } b = 9$$

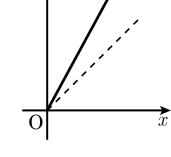
$$\therefore a+b = 16$$

16. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y, y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

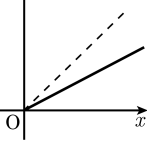


이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

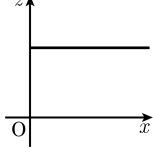
①



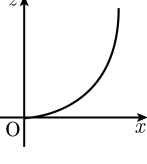
②



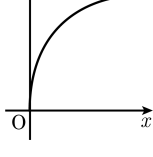
③



④



⑤



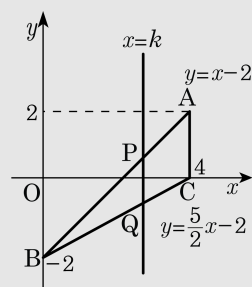
해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를 식으로 나타내면 $y = ax(a > 1), z = by(b > 1)$
 $\therefore z = b(ax) = abx \ (ab > 1)$
 따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

17. 세 점 A (4, 2), B (0, -2), C (4, 0)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x = k$ 가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x = k$ 와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 와의 교점을 각각 P, Q라 하면

$$P(k, k-2), Q\left(k, \frac{1}{2}k-2\right) \text{이다.}$$

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ (k-2) - \left(\frac{1}{2}k - 2 \right) \right\} \times k = 2, \quad k^2 = 8$$

$$\therefore k = 2\sqrt{2} \quad (\because 0 < k < 4)$$

18. 다음 두 직선 $2x + y - 2 = 0, mx - y - 3m + 5 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

- ① $1 < m < \frac{5}{2}$ ② $1 \leq m < \frac{5}{2}$ ③ $1 < m \leq \frac{5}{2}$
 ④ $2 < m < \frac{5}{2}$ ⑤ $2 \leq m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2} \right)$$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

$$\text{i) } \frac{3(m-1)}{m+2} > 0$$

$$\Rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 1$$

$$\text{ii) } \frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2}$$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1 < m < \frac{5}{2}$

해설

$2x + y - 2 = 0$ 의 x, y 절편의 좌표를

각각 구하면 $(1, 0), (0, 2)$ 이고

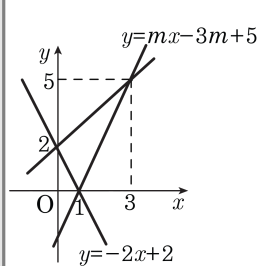
$y = m(x-3) + 5$ 는 다음 그림과 같이 m

값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이

다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m = 1, (1, 0)$

을 대입하면 $m = \frac{5}{2}$

$\therefore 1 < m < \frac{5}{2}$



19. (a, b) 가 직선 $x+y=1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax+by=1$ 은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?

① $(1, 1)$

② $(1, 0)$

③ $(0, 1)$

④ $(-1, -1)$

⑤ $(-1, 0)$

해설

점 (a, b) 가 $x+y-1=0$ 위의 점이므로

$a+b-1=0$ 에서 $b=1-a$

이때, $ax+by-1=ax+(1-a)y-1=0$

$\rightarrow (x-y)a+y-1=0$

$\therefore x-y=0, y-1=0$

즉 $x=y, y=1$

따라서 구하려는 정점은 $(1, 1)$ 이다.

20. 중심이 직선 $2x+y=0$ 위에 있고, 두 점 $(3, 0)$, $(0, 1)$ 을 지나는 원의 방정식은 ?

- ① $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 6 = 0$
② $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 6 = 0$
③ $5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$
④ $5x^2 + 5y^2 + 8x - 16y - 21 = 0$
⑤ $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 12 = 0$

해설

구하는 원의 중심이 직선 $2x + y = 0$ 위에 있으므로 중심을 $(a, -2a)$ 라 할 수 있다.

$$(x-a)^2 + (y+2a)^2 = r^2$$

점 $(3, 0)$ 을 지나므로,

$$(3-a)^2 + (2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{1}$$

또, 점 $(0, 1)$ 을 지나므로,

$$a^2 + (1+2a)^2 = r^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a = \frac{4}{5}, r^2 = \frac{37}{5}$$

$$\therefore \left(x - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{8}{5}\right)^2 = \frac{37}{5}$$

$$\text{정리하면 } 5x^2 + 5y^2 - 8x + 16y - 21 = 0$$

21. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 과 직선 $3x + 4y - a = 0$ 이 서로 접할 때, 모든 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

원의 중심 $(3, 1)$ 에서 직선까지의 거리 d 가 2 이면 접하므로

$$d = \frac{|3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$\therefore |13 - a| = 10 \Leftrightarrow 13 - a = \pm 10$$

따라서, $a = 3$ 또는 23 이므로

모든 a 값들의 합은 26

22. 좌표평면 위의 원 $x^2 + y^2 = 9$ 와 이 원을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 도형의 교점이 1개일 때, $m^2 + n^2$ 의 값은?

- ① 20
- ② 25
- ③ 30
- ④ 36
- ⑤ 40

해설

중심이 $O(0, 0)$ 이고
반지름의 길이가 3인 원을,
 x 축의 방향으로 m 만큼,
 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면
중심이 $O'(m, n)$ 이고
반지름의 길이가 3인 원이다.
두 원의 크기가 같으므로 내접할 수 없고,
두 원의 교점이 1개이므로 두 원은 서로 외접한다.
따라서 중심거리가 반지름의 길이의 합과 같으므로
 $OO' = \sqrt{m^2 + n^2} = 3 + 3 = 6$
 $\therefore m^2 + n^2 = 36$

23. 정점 A(4, 2)과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x 축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$ 가 최소가 되는 거리는?

- ① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y = x$ 에 대해 대칭시킨 점과 A를 x 축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y = x$ 에 대한 대칭점은 $A'(2, 4)$

x 축에 대한 대칭점은 $A''(4, -2)$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} \geq \overline{A'A''}$$

$$= \sqrt{(2-4)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{10}$$

24. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD의 내부에 한 점 P가 $2\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 을 만족시킬 때, 점 P의 자취의 길이는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

A(0, 0), B(0, -2),
D(2, 0), P(a, b) 라고하면 $2 \cdot \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2$ 이므로
 $2 \cdot (a^2 + b^2)$
 $= a^2 + (b+2)^2 + (a-2)^2 + b^2$
 $0 = b - a + 4$
 $\therefore P(a, b) = (a, a-4)$
점 P의 자취는 $b = a - 4$ ($0 < a < 2$)
와 같으므로
구하는 길이는 두 점 (0, -4) 아 (2, -2)
사이의 거리와 같다.
 $\therefore \sqrt{(2-0)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{2}$

25. 두 점 A(-5, -2), B(2, 5) 에 대하여 원 $x^2 + y^2 = 9$ 위를 움직이는 점을 P 라고 할 때, $\triangle ABP$ 의 무게중심 G 는 중심이 (a, b) 이고 반지름이 c 인 원 위를 움직이게 된다. 이 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ 0

해설

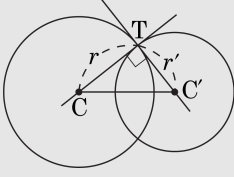
P = (α, β) 라 하면,
 $G = \left(\frac{-5+2+\alpha}{3}, \frac{-2+5+\beta}{3} \right)$
 $= \left(-1 + \frac{\alpha}{3}, 1 + \frac{\beta}{3} \right)$
 $-1 + \frac{\alpha}{3} = p, \quad 1 + \frac{\beta}{3} = q$ 라 하면,
 $\alpha = 3p + 3, \quad \beta = 3q - 3, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 9$ 이므로
 $\therefore (3p + 3)^2 + (3q - 3)^2 = 9$
 $\Rightarrow (p + 1)^2 + (q - 1)^2 = 1$
 $\Rightarrow$ 중심이 $(-1, 1)$ 이고, 반지름이 1 인 원
 $\therefore a + b + c = 1$

26. 두 원 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y + c = 0 \cdots \textcircled{A} \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0 \cdots \textcircled{B} \end{cases}$ 의 교점에서의 접선이 직
교할 때 상수 c 의 값은 ?

- ① -3
- ② -2
- ③ 3
- ④ 2
- ⑤ 1

해설

$\textcircled{A}$ 에서 $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 5 - c$ 이므로
원 $\textcircled{A}$ 의 중심은 $C(-1, -2)$,
반지름의 길이 $r = \sqrt{5 - c}$,
 $\textcircled{B}$ 에서 $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ 이므로
원 $\textcircled{B}$ 의 중심은 $C'(-3, 1)$,
반지름의 길이 $r' = \sqrt{5}$
따라서, $\overline{CC'}^2 = 13$ 이고 그림에서
 $\overline{CT}^2 + \overline{C'T}^2 = \overline{CC'}^2$ 이므로
 $r^2 + r'^2 = \overline{CC'}^2$
 $\therefore 5 - c + 5 = 13$
 $\therefore c = -3$



27. 원 $x^2 + y^2 = 4$ 밖의 한 점 $P(3, 1)$ 에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 A, B 라 할 때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 방정식은?

- ① $x - 3y = 4$
 ② $3x - y = 4$
 ③ $x + 3y = 4$
- ④ $3x + y = 4$
 ⑤ $3x + 2y = 4$

해설

$\overline{AB}$ 는 주어진 원과 중심 P, 반지름 $\overline{PA}$ 인 원과의 공통현이다.
 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \overline{PA}^2 = 6$
 따라서 직선 AB 의 방정식은
 $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 - x^2 - y^2 = 6 - 4$
 이것을 정리하면, $3x + y = 4$

28. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y = ax + b$ 까지의
거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 1 \iff b^2 = a^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \iff (b-2)^2 = 4(a^2 + 1) \cdots \textcircled{2}$$

①, ② 에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면

$$b = -2, \ a^2 = 3$$

$$\text{따라서 } a^2 + b^2 = 7$$

해설

중심 $C_1(0, 0)$ 과 직선 $ax - y + b = 0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|a \cdot 0 - 1 \cdot 0 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, \ |b| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\therefore b^2 = a^2 + 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

중심 $C_2(0, 2)$ 와 직선 $ax - y + b = 0$

사이의 거리는

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2, \ |b-2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2 - 4b = 4a^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① $\times 4 -$ ② 에서

$$3b^2 + 4b - 4 = 0, \ (3b-2)(b+2) = 0$$

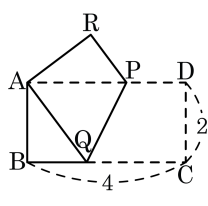
$$\therefore b = \frac{2}{3}, \ -2$$

이 때 $b^2 = a^2 + 1 \geq 1$ 에서 $b = -2$

이것을 ② 에 대입하면 $a^2 = 3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3 + 4 = 7$$

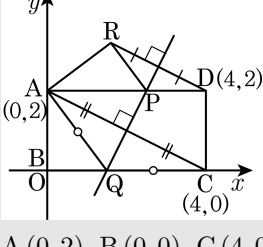
29. 다음 그림과 같이 가로, 세로의 길이가 각각 4, 2인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 접어서 대각선의 양 끝점 A와 C가 겹쳐지도록 하였다. 이 때, 선분 BR의 길이를 구하면?



- ① $8\sqrt{5}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$
 ④ $\frac{8\sqrt{5}}{7}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{9}$

해설

다음 그림과 같이 점 B가 원점이 되도록 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 나타내면



$A(0,2), B(0,0), C(4,0), D(4,2)$

이 때, 두 점 A, C와 두 점 D, R는

각각 직선 PQ에 대하여 대칭이다.

따라서 직선 PQ는 직선 AC와 수직이고,

직선 AC의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

직선 PQ의 기울기는 2이다.

또한, 직선 PQ는 선분 AC의 중점 $(2,1)$ 을 지난다.

따라서, 직선 PQ의 방정식은 $y-1=2(x-2)$,

즉 $y=2x-3$

결국 점 $D(4,2)$ 를 직선 $y=2x-3$ 에 대하여

대칭이동한 점이 R이다.

이 때, $R(a,b)$ 라고 하면

직선 DR과 직선 $y=2x-3$ 이 수직이므로

$$\frac{b-2}{a-4} \cdot 2 = -1$$

$$\therefore a+2b=8 \dots\dots \textcircled{1}$$

또한, 선분 DR의 중점 $\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+2}{2}\right)$ 는

직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$$\frac{b+2}{2} = 2 \cdot \frac{a+4}{2} - 3$$

$$\therefore 2a-b=0 \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = \frac{8}{5}, b = \frac{16}{5}$$

$$\therefore R\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

$$\therefore \overline{BR} = \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{256}{25}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

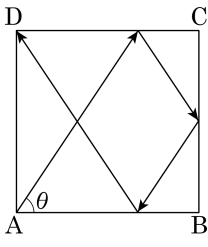
30. 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 발사된 빛이 꼭짓점 D로 들어올 때, $\tan \theta$ 의 값은? (단, 입사각과 반사각은 같다.)

- ① $\frac{1}{2}$

② 1

③ $\frac{3}{2}$
- ④ $2\sqrt{2}$

⑤ 2



해설

다음 그림에서 정사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 발사된 빛이 그림과 같이 꼭짓점 D에 들어올 때 $\tan \theta$ 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

