1. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -1 & -6 & -1 & 2 \\
-1 & & -2 & 3 & 3 & -2 \\
\hline
 & 2 & -3 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
2 & & 4 & 2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

2. 삼차방정식 $x^3+27=0$의 모든 근의 합은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^3+3^3=0$, $(x+3)(x^2-3x+9)=0$

$\therefore x=-3, \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

합 : $-3+\dfrac{3+3\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{3-3\sqrt{3}i}{2}=0$

해설

$x^3+27=0$에서 x^2의 계수가 0이므로 근과 계수와의 관계에 의해 세 근의 합은 0

3. 방정식 $(x-1)(x^2-x-2)=0$의 모든 근의 합을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$(x-1)(x-2)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1,1,2$

$\therefore\ -1+1+2=2$

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$x^4 - 16 = 0$ 에서

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0$

$\therefore\ x = \pm 2$ 또는 $x = \pm 2i$

$\therefore$ 모든 해의 합은 $(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0$

5. 방정식 $x^6 - 1 = 0$의 해가 아닌 것은?

① -1　　② 1　　③ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$　　⑤ $\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$

해설

$x^6 - 1 = (x^3+1)(x^3-1) = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow x = -1,\ 1,\ \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

6. 삼차방정식 $x^3+x-2=0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ ② $-1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}}{2}$
④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow\ (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

7. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$ ② $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$
③ $x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{3}i$ ④ $x = \pm 2,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$
⑤ $x = \pm 2,\ \ x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	−2	2	2	−3
		1	−1	1	3
−1	1	−1	1	3	0
		−1	2	−3	
	1	−2	3	0	

$\Rightarrow\ (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\ \ x = 1 \pm \sqrt{2}i$

8. 방정식 $x^3 - x = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $x = -1$

▷ 정답: $x = 0$

▷ 정답: $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

9. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$

$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$

$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$

$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$

$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$

근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 α, β, γ, δ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

10. 다음 방정식의 모든 근의 합을 구하여라.

$$x^3 - 13x + 12 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

1	1	0	-13	12
		1	1	-12
	1	1	-12	0

$f(x) = x^3 - 13x + 12$라고 하면 $f(1) = 0$이므로
$(x-1)(x^2+x-12) = 0$
$(x-1)(x+4)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = -4$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$
$\therefore\ -4 + 1 + 3 = 0$

11. 다음 삼차방정식의 정수해를 구하여라.

$$x^3 - 1 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ 정수해는 $x = 1$

12. 삼차방정식 $(x-1)(x-2)(x-3)=24$의 모든 실근의 합은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$(x-1)(x-2)(x-3)=24$를 전개하면
$x^3-6x^2+11x-30=0$
$x=5$를 대입하면 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 5 & 1 & -6 & 11 & -30 \\ & & 5 & -5 & 30 \\ \hline & 1 & -1 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$(x-5)(x^2-x+6)=0$

$\therefore\ x=5$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{23}i}{2}$

따라서, 실근은 5뿐이므로 실근의 합은 5이다.

13. 다음 중 방정식 $x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$의 근이 아닌 것은?

① -1 ② 1 ③ 2

④ $1+2i$ ⑤ $1-2i$

해설

조립제법을 이용하여 주어진 식을 인수분해 하면

$x^4-3x^3+5x^2-x-10=0$

$(x+1)(x^3-4x^2+9x-10)=0$

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+5)=0$

$(x+1)(x-2)(x-1-2i)(x-1+2i)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 2,\ 1+2i,\ 1-2i$

따라서 근이 아닌 것은 1이다.

14. 사차방정식 $x^4+2x^3+2x^2-2x-3=0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$ ② $\sqrt{2}i$ ③ -2
④ -1 ⑤ 1

해설

(준식)$=(x-1)(x+1)(x^2+2x+3)=0$
실근의 합은 $1+(-1)=0$
허근의 합은 -2
모든 근의 합은 -2

15. 사차방정식 $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 6 ⑤ 2

해설

$x^4+x^3-7x^2-x+6=0$ 에서
$x=1,\ x=-1$을 대입하면 성립하므로
$x^4+x^3-7x^2-x+6$
$=(x-1)(x+1)(x^2+x-6)$
$=(x-1)(x+1)(x+3)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-3,\ -1,\ 1,\ 2$
따라서 최대의 근은 2

16. 방정식 $x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$의 유리수 근이 아닌 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{6}$

해설

$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$

$(x+3)(x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore \ x = -3, \ 2 \pm \sqrt{3}$

$\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\beta^2 + 1}$

$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1}$

$= \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$

$= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{12}}$

$= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{6}$

17. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$
② $x^4 + x^2 - 2 = 0$
③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$
④ $x^4 - 16 = 0$
⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다
① $(x-2)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1 개, 허근 2 개
② $(x^2-1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2 개, 허근 2 개
③ $(x-3)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3 개
④ $(x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2 개, 허근 2 개
⑤ $x = \dfrac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2 개

18. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(a+1)x^2+2ax+a=0$이 중근을 갖도록 하는 양수 a의 값과 그 때의 중근 α의 값의 합 $a+\alpha$의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

조립제법을 이용한다 $f(-1)=0$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & a+1 & 2a & a \\ & & -1 & -a & -a \\ \hline & 1 & a & a & \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow \quad (x+1)(x^2+ax+a)=0$

$x^2+ax+a=0$에 $x=-1$을 대입하면 0이 아니므로

x^2+ax+a가 중근을 갖는다.

중근일 조건 : 판별식$=0$

$\therefore \quad a^2-4a=0$

$a(a-4)=0 \quad \Rightarrow \quad a=0$또는 $a=4$

$\therefore$ 양수 $a=4 \quad \Rightarrow \quad x^2+4x+4=0(x+2)^2=0$

$\Rightarrow$ 중근 $\alpha=-2 \Rightarrow \quad a+\alpha=2$

19. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & -4 \\ & & -1 & 3 & -4 & 4 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 4 & -4 & \boxed{0} \\ & & 2 & -2 & 4 & \\ \hline & 1 & -1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2 - x + 2) = 0$
따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근
허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

20. 사차방정식 $x^4+x^3-x^2-7x-6=0$ 의 두 허근을 α,β 라 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 1 & -1 & -7 & -6 \\ & & -1 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & -1 & -6 & \boxed{0} \\ & & 2 & 4 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$x^2+2x+3=0$ 의 두 근이 허근이므로

$(D<0\ )\alpha+\beta=-2$

21. 삼차방정식 $x^3-8x^2+17x-10=0$ 의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\alpha-\beta-\gamma$ 의 값은?(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3-8x^2+17x-10=0$ 인수분해하여 해를 구하면

$(x-1)(x-2)(x-5)=0$

$\therefore\ \alpha=1, \beta=2, \gamma=5$

$\therefore\ \alpha-\beta-\gamma=1-2-5=-6$

22. $x^3-2x^2-5x+6=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=-2$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$f(x)=x^3-2x^2-5x+6$ 으로 놓으면

$f(1)=1-2-5+6=0$ 이므로, 조립제법에 의하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -5 & 6 \\ & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$

$=(x-1)(x+2)(x-3)$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=3$

23. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
 & & 1 & -5 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\therefore\ f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

24. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때, ab의 값은?

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0,\ x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, x^2 + bx + a = 0$$

① -1　② 3　③ $-\frac{9}{4}$　④ $\frac{9}{16}$　⑤ $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$의 좌변을 인수분해하면 $(x-1)^2(x+3) = 0$ $\therefore\ x = 1$ 또는 $x = -3$

(i) 공통근이 $x = 1$인 경우 나머지 두 방정식에 $x = 1$을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는 $a,\ b$값은 없다.

(ii) 공통근이 $x = -3$인 경우 다른 두 방정식은 $x = -3$을 근으로 하므로 $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\}$ $\cdots\cdots$㉠

$\{9 - 3b + a = 0\}$ $\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a = -\frac{9}{4},\ b = \frac{9}{4},\ ab = -\frac{81}{16}$

25. 삼차방정식 $x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}=0$의 세 근을 $\alpha,\beta,\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$라 할 때,$\alpha\le m\le\gamma$인 정수 m의 개수를 구하면?

① 23 개 ② 24 개 ③ 25 개 ④ 26 개 ⑤ 27 개

해설

$f(x)=x^3-(7\cdot 2^3)x^2+(7\cdot 2^7)x-2^{12}$이라 할 때 $f(2^3)=f(2^4)=f(2^5)=0$ 이므로

$f(x)=(x-2^3)(x-2^4)(x-2^5)$

$\alpha<\beta<\gamma$ 에서 $\alpha=2^3,\ \gamma=2^5$ 이므로

$2^3\le m\le 2^5$

$\therefore$ 정수 m의 개수는 $2^5-2^3+1=25$