

1. 수직선 위의 두 점 $P(2)$, $Q(x)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = 3$ 이고, x 의 값을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

i) $x > 2$ 일 때, $x - 2 = 3 \therefore x = 5$

ii) $x < 2$ 일 때, $2 - x = 3 \therefore x = -1$

따라서 α, β 의 값은 -1 또는 5

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 26$$

2. 두 점 A(1, 2), B(-2, 6) 사이의 거리는?

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{\{1 - (-2)\}^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$

3. 두 점 A(3, 4), B(1, 6)의 중점 G의 좌표는?

① $G(-2, 5)$

② $G(2, -5)$

③ $G(2, 5)$

④ $G(-2, -5)$

⑤ $G(2, 0)$

해설

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \text{이므로}$$

$$G\left(\frac{3+1}{2}, \frac{4+6}{2} \right),$$

$$\text{즉 } G(2, 5)$$

4. 세 점 $A(a, 4)$, $B(1, b)$, $C(3, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표가 $G(2, 1)$ 일 때, ab 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ 3

⑤ 4

해설

무게중심의 좌표가 $G(2, 1)$ 이므로

$$\frac{a + 1 + 3}{3} = 2, \frac{4 + b + 1}{3} = 1$$

$$a + 4 = 6 \quad \therefore a = 2$$

$$b + 5 = 3 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore ab = 2 \times (-2) = -4$$

5. 네 점 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$

② $\frac{4}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

6. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

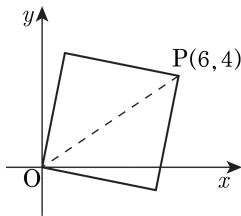
① 16

② 20

③ 26

④ 32

⑤ 52



해설

$$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \text{ 이므로}$$

주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면

$$\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52} \text{ 에서 } a^2 = 26 \text{ 이다.}$$

따라서 정사각형의 넓이는 26이다

7. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(-3, 0)$

② $(1, 0)$

③ $(2, 0)$

④ $(-1, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

x 축 위의 점을 $P(x, 0)$ 라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x + 3)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 4)^2 + (0 - 5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, $P(2, 0)$

8. 두 점 $A(-1, 4), B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서

$$(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9, a = 2$$

$$\therefore P = (2, 0)$$

$$a + b = 2$$

9. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \text{㉠}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\text{㉠에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

10. 좌표평면 위의 두 점 $A(3, 2)$, $B(5, 4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6

② $\sqrt{37}$

③ $\sqrt{38}$

④ $\sqrt{39}$

⑤ $\sqrt{40}$

해설

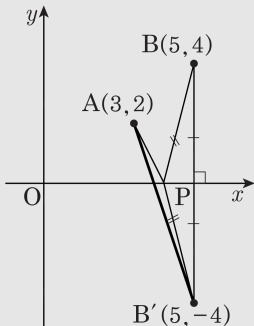
다음 그림과 같이 점 $B(5, 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5, -4)$ 라 하면

$$\overline{PB} = \overline{PB'} \text{ 이므로}$$

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$$\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



11. 두 점 $A(a, 1)$, $B(3, b)$ 에 대하여 선분 AB 를 $3 : 2$ 로 외분하는 점이 $(1, 4)$ 일 때, $a + b$ 를 구하면?

① 6

② 4

③ 3

④ -3

⑤ 5

해설

$$(1, 4) = \left(\frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot a}{3 - 2}, \frac{3 \cdot b - 2 \cdot 1}{3 - 2} \right)$$

$$= (9 - 2a, 3b - 2) = (1, 4) \text{ 이므로}$$

$$9 - 2a = 1, 2a = 8, a = 4$$

$$3b - 2 = 4, 3b = 6, b = 2$$

$$\therefore a + b = 6$$

12. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2} \right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2} \right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

13. 세 점 $A(3, 2)$, $B(-2, -3)$, $C(a, b)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표 $G(1, 1)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$G\left(\frac{3 + (-2) + a}{3}, \frac{2 + (-3) + b}{3}\right) = G(1, 1) \text{ 이므로,}$$

$$\frac{3 + (-2) + a}{3} = 1, 3 + (-2) + a = 3, a = 2$$

$$\frac{2 + (-3) + b}{3} = 1, 2 + (-3) + b = 3, b = 4$$

$$\therefore a + b = 6$$

14. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

15. 두 점 $A(0, 3)$, $B(5, -2)$ 로부터 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$

② $(2, 0)$

③ $(3, 0)$

④ $(4, 0)$

⑤ $(5, 0)$

해설

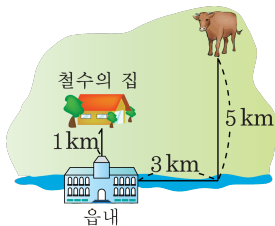
점 P 를 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로, } \alpha^2 + 9 = (\alpha - 5)^2 + 2^2$$

$$\therefore \alpha = 2$$

$$\therefore P = (2, 0)$$

16. 철수의 집은 읍내로부터 정북으로 1km 떨어져 있다. 그리고 작은 시냇물이 정동에서 정서로 읍내를 관통해서 흐르고 있다. 지금 철수는 읍에서 정동으로 3km, 정북으로 5km 떨어진 곳에서 소에게 풀을 먹고 있다. 이때 철수가 시냇가로 가서 소에게 물을 먹이고 집으로 가는 최단 거리는 몇 km인가?



① 3 km

② $4\sqrt{3}$ km

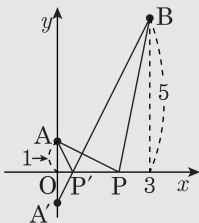
③ $3\sqrt{5}$ km

④ $4\frac{5}{6}$ km

⑤ 2.5 km

해설

위의 문제 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



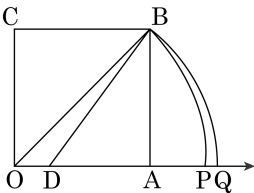
집의 위치는 $A(0, 1)$, 철수의 현 위치는 $B(3, 5)$

따라서 시냇가의 어느 한 지점 P 까지 와서 집까지 가는 거리는 $\overline{BP} + \overline{AP}$ 이다.

이 거리가 가장 짧으려면 A 의 대칭점 $A'(0, -1)$ 과 B 를 잇는 $\overline{A'B} = \overline{BP'} + \overline{A'P'}$ 이 가장 짧은 거리이다.

$$\therefore \overline{A'B} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

17. 다음 그림과 같이 반직선 OA 와 한 변의 길이가 4 인 정사각형 OABC 가 있다. 점 O 를 중심으로 하고 선분 OB 를 반지름으로 하는 원이 반직선 OA 와 만나는 점을 P , 선분 OA 를 1 : 3 으로 내분하는 점 D 를 중심으로 하고 선분 DB 를 반지름으로 하는 원이 반직선 OA 와 만나는 점을 Q 라 하자. 이때, $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$ 의 값은?



① 52

② 56

③ 60

④ 64

⑤ 68

해설

$$\overline{OP} = \overline{OB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{4}\overline{OA} = 1, \overline{DA} = 3, \overline{DB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ 이므로,}$$

$$\overline{OQ} = \overline{OD} + \overline{DB} = 1 + 5 = 6$$

$$\therefore \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = 32 + 36 = 68$$

18. 두 정점 A(1, 2), B(-3, 0)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분선이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

$$\therefore y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

19. 두 점 $A(3,0)$, $B(0,2)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$ 를 만족하는 점 P 의 자취의 방정식은?

① $-3x + 2y + 9 = 0$

② $3x + 2y = 0$

③ $6x - 4y + 9 = 0$

④ $-3x + 2y = 0$

⑤ $-6x + 4y - 5 = 0$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$ 라 하면

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-2)^2\} = 5$$

$$\text{정리하면 } -6x + 4y = 0$$

$$\therefore -3x + 2y = 0$$

20. 세 점 $A(-1, -4)$, $B(3, -3)$, $C(7, 1)$ 과 좌표평면 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은?

- ① 46 ② 45 ③ 44 ④ 43 ⑤ 42

해설

점 P 를 $P(x, y)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= \{(x+1)^2 + (y+4)^2\} \\ &+ \{(x-3)^2 + (y+3)^2\} \\ &+ \{(x-7)^2 + (y-1)^2\} \\ &= x^2 + 2x + 1 + y^2 + 8y + 16 + x^2 - 6x + 9 \\ &+ y^2 + 6y + 9 + x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 \\ &= 3x^2 - 18x + 3y^2 + 12y + 85 \\ &= 3(x^2 - 6x + 9) + 3(y^2 + 4y + 4) + 46 \\ &= 3(x-3)^2 + 3(y+2)^2 + 46 \end{aligned}$$

따라서 $x = 3$, $y = -2$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 최솟값은 46 이다.

21. 좌표평면에서 세 점 A(-1, 1), B(2, 2), C(6, 0)에 대하여 $\triangle ABC$ 의 세 변의 수직이등분선의 교점의 좌표는?

① (2, -1)

② (2, -2)

③ (2, -3)

④ (-2, 3)

⑤ (-2, -3)

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기 : $\frac{2-1}{2-(-1)}$, 중점은 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ 수직이등분선

$$: y = -3\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$$

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{2-1}{6-2} = \frac{1}{4}$, 중심은 (4, 1) $\Rightarrow$ 수직이등분

$$\text{선: } y = 2(x - 4) + 1$$

두 직선의 교점을 구해보면 $x = 2, y = -3$

$\therefore$ 세 변의 수직이등분선의 교점은 한 점에서 만나므로

$$\therefore (2, -3)$$

해설

세 점을 연결한 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점은 삼각형의 외심이므로 각 점에 이르는 거리가 같다.

O(x, y)라고 하면

$$\overline{AO} = \overline{CO} \text{에서 } (x+1)^2 + (y-1)^2 = (x-6)^2 + y^2, 7x - y = 17 \cdots \textcircled{7}$$

$$\overline{BO} = \overline{CO} \text{에서 } (x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-6)^2 + y^2, 2x - y = 7 \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{7} \textcircled{4} \text{에서 교점의 좌표는 } (2, -3)$$

22. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

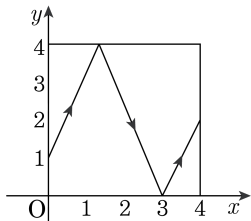
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$$

$$\therefore x = \pm 6$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 6$$

23. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



- ① $(1, 4)$ ② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$
 ④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$

와의 교점을 계산하면 된다. $\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \therefore x = \frac{4}{3}$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

24. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $G(1, 4)$ 이고, 세 변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b) , $(3, 4)$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심 G 는

세변 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.

따라서 $\frac{-1 + a + 3}{3} = 1$, $\frac{6 + b + 4}{3} = 4$ 이므로

$a = 1$, $b = 2$ 이고, $\therefore a + b = 3$

25. 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = 3x + 2$ ($-1 \leq x \leq 2$) 위를 움직일 때, 점 $Q(a + b, a - b)$ 가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$

② $3\sqrt{5}$

③ $4\sqrt{5}$

④ $5\sqrt{5}$

⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = 3x + 2$ 위의 점이므로

$$b = 3a + 2 \text{ (단, } -1 \leq a \leq 2) \cdots \text{㉠}$$

이 때, 점 $Q(a + b, a - b)$ 에서

$a + b = X$, $a - b = Y$ 로 놓고

a, b 를 X, Y 로 나타내면

$$a = \frac{X + Y}{2}, b = \frac{X - Y}{2}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{X - Y}{2} = \frac{3X + 3Y}{2} + 2$$

$$\therefore X + 2Y + 2 = 0$$

한편, $X = a + b = a + (3a + 2) = 4a + 2$ 이고

$$-1 \leq a \leq 2 \text{ 이므로 } -2 \leq 4a + 2 \leq 10$$

$$\therefore -2 \leq X \leq 10$$

따라서 점 $Q(x, y)$ 는

직선 $x + 2y + 2 = 0$ (단, $-2 \leq x \leq 10$) 위를 움직인다.

그런데 $x = -2$ 일 때, $y = 0$

$x = 10$ 일 때, $y = -6$ 이므로

구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2, 0), (10, -6)$ 을 이은 선분의 길이와 같다.

$$\therefore \sqrt{(10 + 2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$