

1. 두 점 A(2, 7), B(-1, 3)사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

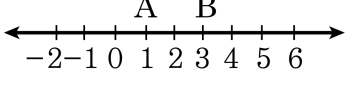
▷ 정답 : 5

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-7)^2} = 5$$

2. 다음 빈 칸에 들어갈 수를 차례로 써라.

다음 수직선의 점들 중에서 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는 ()이고, 1 : 2로 외분하는 점의 좌표는 ()이다.



▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

▷ 정답 : -1

해설

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점은 선분 AB의 오른쪽 연장선 위에 있다.

선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점을 Q라 놓으면 선분 AQ의 길이와 선분 BQ의 길이의 비가 2 : 1이 되어야 하므로 구하는 점 Q의 좌표는 Q(5)이다.

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점은 선분 AB의 왼쪽 연장선 위에 있다.

선분 AB를 1 : 2로 외분하는 점을 R라 놓으면 선분 AR의 길이와 선분 BR의 길이의 비가 1 : 2이 되어야 하므로 구하는 점 R의 좌표는 R(-1)이다.

3. 두 점 $A(a, b)$, $B(3, 5)$ 를 이은 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 $P(c, 9)$ 이고 선분 AB의 중점이 $M(1, e)$ 일 때, $abce$ 의 값은?

① -10

② 10

③ -21

④ 0

⑤ 21

해설

$$(c, 9) = \left(\frac{2 \times 3 - 1 \times a}{2 - 1}, \frac{2 \times 5 - 1 \times b}{2 - 1} \right)$$

$$(1, e) = \left(\frac{a + 3}{2}, \frac{b + 5}{2} \right)$$

$$\therefore a = -1, b = 1, c = 7, e = 3$$

$$\therefore abce = -21$$

4. 다음은 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 무게중심 G 의 좌표가 $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ 임을 보인 것이다. ()안에 알맞은 것을 순서대로 쓴 것은?

선분 BC 의 중점을 $M(x', y')$ 이라 하면,
 $x' = (\ominus)$, $y' = \frac{y_2 + y_3}{2}$
 무게 중심 $G(x, y)$ 는 선분 AM 을 $(\textcircled{L})$ 로 내분하는 점이므로
 $x = \frac{2 \times x' + 1 \times x_1}{2 + 1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3}$
 같은 방법으로 $y = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3}$
 $\therefore G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

- ① $x_2 + x_3, 2 : 1$ ② $x_2 + x_3, 3 : 1$ ③ $\frac{x_2 + x_3}{2}, 1 : 1$
 ④ $\frac{x_2 + x_3}{2}, 3 : 1$ ⑤ $\frac{x_2 + x_3}{2}, 2 : 1$

해설

$\overline{BC}$ 의 중점 $M(x', y')$ 은
 $\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$ 이므로
 $x' = \frac{x_2 + x_3}{2}, y' = \frac{y_2 + y_3}{2}$ 이고
 무게중심 $G(x, y)$ 는 선분 $\overline{AM}$ 을
 $2 : 1$ 로 내분하는 점이므로
 $x = \frac{2 \times x' + 1 \times x_1}{2 + 1}$
 $= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ 이고
 $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

5. 점 $(2, 3)$ 을 지나고, 기울기가 -2 인 직선의 방정식은?

- ① $y = 2x + 7$ ② $y = 2x - 7$ ③ $y = -2x + 7$
④ $y = -2x - 7$ ⑤ $y = -7x + 2$

해설

점 (x_1, y_1) 을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y - y_1 = m(x - x_1)$
점 (x_1, y_1) 을 지나고, 기울기가 m 인 직선의 방정식은
 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이므로
 $y - 3 = -2(x - 2)$, 즉 $y = -2x + 7$

6. 두 점 $(1, -2)$, $(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a - b$ 의 값은?

① 1

② 4

③ 7

④ 10

⑤ 13

해설

두 점 $(1, -2)$, $(3, 6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y + 2 = \frac{6 + 2}{3 - 1}(x - 1)$$

$$y + 2 = 4(x - 1)$$

$$\therefore y = 4x - 6$$

$$\text{즉, } a = 4, b = -6$$

$$\therefore a - b = 4 - (-6) = 10$$

7. 세 점 A (1, 2), B (2, m), C ($-m$, -2)가 일직선 위에 있을 때, 상수 m 의 값은? (단, $m < 0$)

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

(직선 AB의 기울기)=(직선 AC의 기울기)이므로

$$\frac{m-2}{2-1} = \frac{-2-2}{-m-1}$$

$$m-2 = \frac{4}{m+1}, \quad m^2 - m - 2 - 4 = 0$$

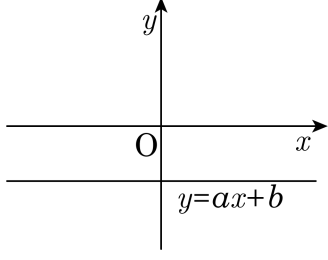
$$m^2 - m - 6 = 0, \quad (m+2)(m-3) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = 3$$

$$\therefore m = -2 \quad (\because m < 0)$$

8. 다음 그림과 같이 $y = ax + b$ 의 그래프가 x 축에 평행인 직선일 때, $y = bx + a - 2$ 의 그래프가 반드시 지나는 사분면을 모두 고르면?

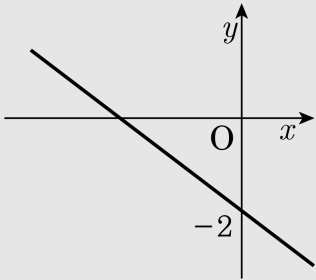
- ㉠ 제1사분면
- ㉡ 제2사분면
- ㉢ 제3사분면
- ㉣ 제4사분면



- ① ㉠, ㉡
- ② ㉡, ㉣
- ③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉠, ㉣, ㉡, ㉣
- ⑤ ㉡, ㉣, ㉡

해설

주어진 직선 $y = ax + b$ 의 그래프가 x 축과 평행하면서 x 축 아래쪽에 놓여 있으므로 $a = 0$, $b < 0$ 이다.
 이 때, $y = bx + a - 2$ 에서
 기울기: $b < 0$, y 절편: $a - 2 = -2 < 0$ 이므로
 직선 $y = bx + a - 2$ 의 그래프는
 다음 그림과 같다.
 따라서 이 직선의 그래프가 반드시 지나는
 사분면은 제 2, 3, 4사분면이다.



9. 좌표평면 위의 네 점 A(-3, -3), B(3, -3), C(3, 5), D(-3, 5)를 꼭짓점으로 하는 직사각형 ABCD가 있다. ABCD의 넓이를 이등분하는 직선이 항상 지나는 점E의 좌표는?
- ① (-4, 0) ② (0, 1) ③ (0, 2)
- ④ (1, 2) ⑤ (4, 3)

해설

좌표평면 위에 네 점 A, B, C, D를 그리면
대각선의 교점은 AC의 중점이다.

$$\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{-3+5}{2}\right) = (0, 1)$$

따라서 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선은
항상(0, 1)을 지난다.

10. 두 점 A(1, -4), B(3, 2)를 지나는 직선과 수직인 직선의 기울기는?

- ① -3 ② $-\frac{1}{3}$ ③ -1 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ 3

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{2 - (-4)}{3 - 1} = 3$ 이므로
수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이다.

11. 원점 O에서 직선 L : $ax - y + 1 = 0$ 에 내린 수선의 길이가 $\frac{1}{2}$ 일 때 양수 a 의 값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 3

해설

수선의 길이는 원점과 직선 L 사이의 거리이므로

$$\frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{a^2 + 1} = 2$$

$$a^2 = 3$$

$$\therefore a = \sqrt{3} (\because a > 0)$$

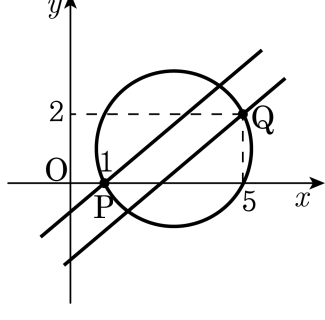
12. 방정식 $2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$ 은 원을 나타낸다. 반지름의 길이를 구하면?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 4 ③ $\sqrt{2}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 2(y^2 - 2y + 1 - 1) + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2(x + 1)^2 + 2(y - 1)^2 &= 1 \\ \Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore \text{반지름 길이 } \sqrt{\frac{1}{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

13. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 (1, 0), (5, 2)이고, 원의 반지름의 길이가 r 일 때, r^2 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.

따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{PQ}$ 의 중점 C(3, 1)이므로,

$$r^2 = \overline{PC}^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 0)^2 = 5 \text{ 이다.}$$

14. 세 점 P(1, 0), Q(0, -1), R(2, 2)을 지나는 원의 방정식은 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 이다. 이때, $a + c$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ 2 ⑤ 3

해설

P, Q, R의 좌표를 원의 방정식에 각각 대입하면

$$\begin{cases} 1 + a + c = 0 \cdots \textcircled{A} \\ 1 - b + c = 0 \cdots \textcircled{B} \\ 2a + 2b + c + 8 = 0 \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

$\therefore \textcircled{A}$ 에서 $a + c = -1$

15. 중심이 $y = x - 1$ 위에 있고 두 점 $(0, 3)$, $(4, 3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $\sqrt{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

해설

중심을 $(a, a - 1)$, 반지름을 r 이라 하면,

구하는 원의 방정식은

$$(x - a)^2 + (y - a + 1)^2 = r^2 \dots\dots \textcircled{A}$$

i) $\textcircled{A}$ 이 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} a^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 8a + 16 &= r^2 \dots\dots \textcircled{B} \end{aligned}$$

ii) $\textcircled{A}$ 이 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\begin{aligned} (4 - a)^2 + (4 - a)^2 &= r^2 \\ \Rightarrow 2a^2 - 16a + 32 &= r^2 \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

$$\textcircled{B} - \textcircled{C} : 8a - 16 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$\therefore \textcircled{B} \text{에서 } r^2 = 8 - 16 + 16 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

16. 두 점 A(4, -3), B(a, 3) 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 A(4, -3), B(a, 3) 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

17. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} = \overline{BC} &\text{에서 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 이므로} \\ (3-2)^2 + (a-0)^2 &= (4-3)^2 + (2-a)^2 \\ 1 + a^2 &= 1 + 4 - 4a + a^2 \\ 4a &= 4 \quad \therefore a = 1\end{aligned}$$

18. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

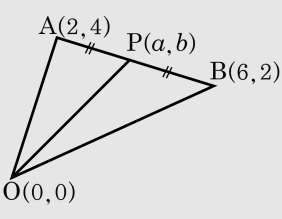
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

19. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
높이가 같으므로
 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
 $\therefore a+b=7$

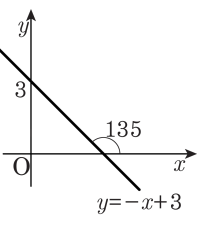


20. 함수 $y = -x + 3$ 의 그래프와 x 축의 양의 방향이 이루는 각 θ 는 몇 $^{\circ}$ 인지 구하면?

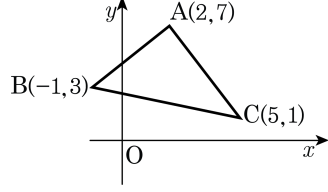
- ① 45° ② 60° ③ 120° ④ 135° ⑤ 150°

해설

$y = -x + 3$ 를 그리면
기울기: -1 , y 절편: 3 이므로
다음 그림과 같다.
이 때, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기 θ 는
 $-1 = \tan \theta$ 에서 $\theta = 135^{\circ}$



21. 세 점 A(2, 7), B(-1, 3), C(5, 1)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



- ① $x - y - 2 = 0$ ② $x + y - 2 = 0$ ③ $x - 2 = 0$
 ④ $3x - y + 1 = 0$ ⑤ $4x + y - 1 = 0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로 점A와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

따라서, 두 점(2, 7) 과(2, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

22. 곡선 $y = x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C의 x 좌표를 각각 a, b, c 라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

- ① $a + b + c = 0$ ② $a + b + c = 1$ ③ $abc = 1$
④ $a + c = 2b$ ⑤ $ac = b^2$

해설

서로 다른 세 점 $A(a, a^3)$, $B(b, b^3)$, $C(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다.

$$\therefore \frac{b^3 - a^3}{b - a} = \frac{c^3 - a^3}{c - a}$$

$$\text{즉, } b^2 + ab + a^2 = c^2 + ac + a^2$$

$$(b - c)(a + b + c) = 0 \text{ 에서 } b \neq c \text{ 이므로}$$

$$a + b + c = 0$$

23. 직선 $x+ay+3=0$ 이 $2x-3y-5=0$ 에 평행하도록 상수 a 의 값은?

- ① $\frac{3}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{2}{3}$ ⑤ $-\frac{3}{4}$

해설

두 직선 $x+ay+3=0$, $2x-3y-5=0$ 이 평행

$$\frac{2}{1} = \frac{-3}{a} \neq \frac{-5}{3}, \text{ 즉 } \frac{2}{1} = \frac{-3}{a}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2}$$

24. 세 직선 $2x - y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $y = ax + 2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$$2x - y - 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x - 2y - 2 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$y = ax + 2 \cdots \textcircled{3} \text{이라 할 때,}$$

①, ②의 교점이 ③위에 있으면, 한 점에서 만나므로

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } x = 2, y = 0$$

두 직선의 교점 (2, 0) 이 직선 $y = ax + 2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$$0 = 2a + 2, 2a = -2$$

$$\therefore a = -1$$

25. 두 직선 $3x - 2y - 4 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$ 의 교점과 점 $(1, -4)$ 를 지나는 직선의 방정식은?

㉠ $5x - y - 9 = 0$

㉡ $5x + y - 9 = 0$

㉢ $x - 2y - 1 = 0$

㉣ $2x - 3y - 1 = 0$

㉤ $2x - y + 3 = 0$

해설

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠} \\ x + 2y - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} : x = 2, y = 1$$

$$\therefore \text{교점} : (2, 1)$$

$$\therefore \text{구하는 직선은 } y - 1 = \frac{-4 - 1}{1 - 2}(x - 2) = 5(x - 2)$$

$$\therefore 5x - y - 9 = 0$$

26. 두 직선 $x + y = 3$, $mx - y + 2m - 5 = 0$ 이 제 1사분면에서 만날 때, m 의 값의 범위는?

- ① $-2 < m < 2$
- ② $-2 < m < 3$
- ③ $-1 < m < 2$
- ④ $1 < m < 4$
- ⑤ $0 < m < 3$

해설

$mx - y + 2m - 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $m(x + 2) - (y + 5) = 0$ 이므로
위의 직선은 m 의 값에 관계없이
점 $(-2, -5)$ 를 지나고, 기울기 m 인 직선이다.
따라서 두 직선이 제 1사분면에서
만나기 위해서는 직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 과 $(0, 3)$ 을
잇는 선분의 사이를 지나면 된다.
직선 $\textcircled{1}$ 이 $(3, 0)$ 을 지날 때 $m = 1$ 이고
 $(0, 3)$ 을 지날 때 $m = 4$ 이므로
따라서 $1 < m < 4$

27. 서로 수직인 두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점을 H 라 할 때,
H 의 좌표는 ()이다. 따라서, 원점에서 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 까지의
거리는 ()이다. 위의 ()안에 알맞은 것을 차례대로 나열하면?

- ① $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{2\sqrt{5}}{5}$

② $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$
- ③ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{3\sqrt{5}}{5}$

④ $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right), \frac{4\sqrt{5}}{5}$
- ⑤ $(1, 2), \sqrt{5}$

해설

두 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ 와 $y = 2x$ 의 교점

H 의 좌표는 $-\frac{1}{2}x + 2 = 2x, -x + 4 = 4x$

이고 $x = \frac{4}{5}, y = \frac{8}{5}$ 이다. 즉, H $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ 이므로

따라서 $\overline{OH} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

28. A(0, -2), B(3, 3), C(4, 0) 인 $\triangle ABC$ 의 넓이는?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\overline{BC} = \sqrt{(4-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$$

또, 직선 BC의 방정식은 $3x + y - 12 = 0$ 이므로

A(0, -2)로부터 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{|-2-12|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} = 7$$

29. 점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 점 $(0, -3)$ 을 지나는 원의 반지름의 길이가 5 일 때, 양수 a 의 값은?

① 2

② $2\sqrt{2}$

③ 3

④ $2\sqrt{3}$

⑤ 4

해설

점 $(a, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5 인
원의 방정식은 $\therefore (x - a)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$
이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로 $(0 - a)^2 + (-3 - 1)^2 = 25$
 $a^2 = 9 \quad \therefore a = 3, (\because a > 0)$

30. 이차방정식 $x^2 + y^2 + 2ax - 4ay + 6a^2 - a - 6 = 0$ 이 원의 방정식이 될 때 다음 중 a 가 가질 수 없는 정수 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x + a)^2 + (y - 2a)^2 = -(a^2 - a - 6)$
이것이 원을 나타내려면 $-(a^2 - a - 6) > 0$
즉 $a^2 - a - 6 < 0$
 $\therefore -2 < a < 3$

31. x 축에 접하는 원 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 의 중심의 좌표가 $(3, -2)$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

중심의 좌표가 $(3, -2)$ 인 원이 x 축에 접하므로
반지름의 길이는 2 이다.
따라서 구하는 원의 방정식은
 $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
 $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$
 $\therefore a + b + c = -6 + 4 + 9 = 7$

32. 원 $x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$ 이 점 $(-3, 4)$ 를 지나고, x 축에 접하도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$
이 점 $(-3, 4)$ 를 지나므로
 $9 + 16 + 6 - 16a + b = 0$
 $\therefore 16a - b = 31 \dots\dots\textcircled{\text{A}}$
 $x^2 + y^2 - 2x - 4ay + b = 0$ 은
 $(x-1)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2 - b + 1$ 이고
원이 x 축에 접하므로
 $2a = \sqrt{4a^2 - b + 1}, 4a^2 = 4a^2 - b + 1$
 $\therefore b = 1 \dots\dots\textcircled{\text{B}}$
 $\textcircled{\text{A}}$ 을 $\textcircled{\text{B}}$ 에 대입하면 $16a - 1 = 31$
 $\therefore a = 2 \quad \therefore a + b = 2 + 1 = 3$

33. 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

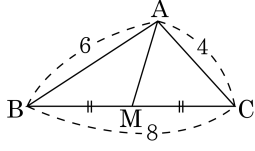
▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 (2, 1) 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 (r, r) 이다.
 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이고
또한 (2, 1) 을 지나므로
 $(2-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$,
 $(r-1)(r-5) = 0$
 $\therefore r = 1$ 또는 5
 $\therefore (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 또는 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$
 $\therefore 1 + 5 = 6$

34. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로
 $6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$
 $36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
 $\therefore \overline{AM}^2 = 10$

35. 좌표평면 위의 네 점 A(1, 2), P(0, b), Q(a, 0), B(5, 1)에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하여라.

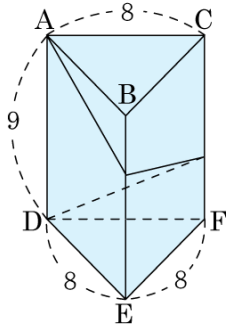
▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 A (1, 2)의 y축에 대하여 대칭인 점을 A'(-1, 2), 점 B(5, 1)의 x축에 대하여 대칭인 점을 B'(5, -1)이라 하면
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$
 $\geq \overline{A'B'} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45}$
따라서 $k = \sqrt{45}$ 이므로 $k^2 = 45$

36. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

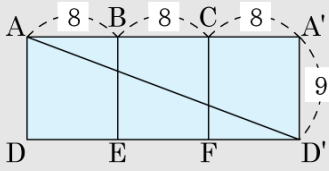


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



37. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$

또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$

$\therefore a + b = -1$

38. 좌표평면 위의 두 점 A(1,0),B(5,4)에 대하여 조건 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 만족하는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

- ① $x - y + 1 = 0$
- ② $x + 2y + 4 = 0$
- ③ $x + y + 3 = 0$
- ④ $x - 3y + 4 = 0$
- ⑤ $x + y - 5 = 0$

해설

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 주어진 조건

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 를 이용하여

x, y사이의 관계식을 구한다.

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓자.

이때, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

$$8x + 8y - 40 = 0$$

$$\therefore x + y - 5 = 0$$

39. 세 점 A(1, 6), B(-2, 2), C(4, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 P(a, b)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 값이 최소일 때, a + b의 값은?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} &\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \\ &= \{(a-1)^2 + (b-6)^2\} + \{(a+2)^2 + (b-2)^2\} \\ &\quad + \{(a-4)^2 + (b-1)^2\} \\ &= 3a^2 - 6a + 3b^2 - 18b + 62 \\ &= 3(a^2 - 2a + 1) + 3(b^2 - 6b + 9) + 32 \\ &= 3(a-1)^2 + 3(b-3)^2 + 32 \end{aligned}$$

이때, a, b는 실수이므로

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 \text{의 값은}$$
$$a=1, b=3 \text{일 때 최소이다.}$$
$$\therefore a+b=4$$

40. 세 점 A(0,0), B(1,0), C(1,2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

- ① $P\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

해설

$$\begin{aligned} &P(x, y) \text{ 라 두면} \\ &x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ &= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6 \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$

∴ $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이 된다.

$$\left(\frac{0+1+1}{3}, \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

41. 두 직선 $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식 중에서 기울기가 양수인 것은?

① $y = x$

② $y = \frac{1}{2}x$

③ $y = \frac{1}{3}x$

④ $y = \frac{1}{4}x$

⑤ $y = \frac{1}{5}x$

해설

P(x, y) 라 하면,

(i) $2x - y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_1 은

$$d_1 = \frac{|2x - y - 1|}{\sqrt{4 + 1}}$$

(ii) $x + 2y - 1 = 0$ 까지의 거리 d_2 는

$$d_2 = \frac{|x + 2y - 1|}{\sqrt{1 + 4}}$$

$d_1 = d_2$ 이므로 $|2x - y - 1| = |x + 2y - 1|$

$\therefore 2x - y - 1 = \pm(x + 2y - 1)$

즉, $x - 3y = 0$, $3x + y - 2 = 0$

그런데 기울기가 양수이므로 $x - 3y = 0$

$\therefore y = \frac{1}{3}x$

42. 점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를 움직일 때, 점 $(a, a + b)$ 의 자취의 방정식은?

- ㉠ $y = 3x - 2$ ㉡ $y = 4x - 3$ ㉢ $y = 5x - 4$
㉣ $y = 6x - 5$ ㉤ $y = 7x - 6$

해설

$x = a \cdots \textcircled{1}$
 $y = a + b \cdots \textcircled{2}$ 에서
 a, b 를 소거한다.
점 (a, b) 가 직선 $2x - y - 2 = 0$ 위를
움직이므로 $2a - b - 2 = 0$
 $\therefore b = 2a - 2$ 이것을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $y = 3a - 2$
 $\therefore y = 3x - 2$ ($\because \textcircled{1}$)

43. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$ ② $2x + 3y + 1 = 0$
③ $4x - 3y + 1 = 0$ ④ $x - 4y - 3 = 0$
⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를

P(X, Y)라 하면,

$P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로

$X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$

$\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$

이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면

$2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$

$4X + 2Y - 3 = 0$

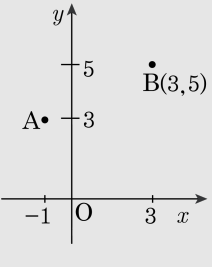
$\therefore 4x + 2y - 3 = 0$

44. 두 점 A(-1, 3), B(3, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

- ① 4 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P(a , 0)이라하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$
 $(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2, 8a = 24$
 $\therefore a = 3$
Q(0, b)이라 하면, $\overline{AQ} = \overline{BQ}$
 $1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$
 $\therefore 4b = 24$
 $\therefore b = 6$ P(3, 0), Q(0, 6)
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



45. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A(-2, 0), B(4, -2)로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① (-1, 1)

② (0, 2)

③ (1, 3)

④ (2, 4)

⑤ (3, 5)

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 $P(a, a + 2)$ 라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$$

$$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$$

$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

46. 세 꼭짓점이 A(1, 3), B(p , 3), C(1, q) 인 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표가 (2, 1)일 때 pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2 \text{에서 } (p-2)^2 = 1$$

$$\therefore p = 1, 3$$

그런데 $p = 1$ 일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1 \therefore p = 3$

$$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2 \text{에서 } (q-1)^2 = 4$$

$$\therefore q = 3, -1$$

그런데 $q = 3$ 일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$$\therefore pq = 3 \times (-1) = -3$$

47. 네 점 $A(-2, 3)$, $B(3, a)$, $C(b, 4)$, $D(2, 8)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\square ABCD$ 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

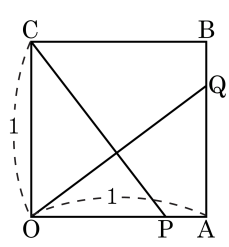
- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\square ABCD$ 가 마름모이므로
 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$ 이다.
따라서 점 D는 점 A를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x 축 방향으로 4만큼
 y 축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
 $\therefore (3 + 4, a + 5) = (b, 4)$
 $\therefore a = -1, b = 7$
 $\therefore a + b = 6$

48. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC의 두 변 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 위에 각각 점 P, Q를 $\overline{OP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡을때, $(\overline{CP}$ 의 기울기) $\times$ $(\overline{OQ}$ 의 기울기)를 구하면?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $\frac{1}{2}$
 ④ 1 ⑤ 2



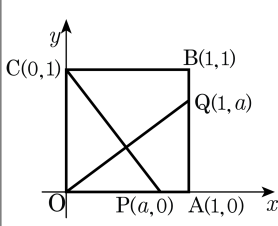
해설

정사각형 OABC에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 $(\overline{CP}$ 의 기울기) $= \frac{-1}{a}$,

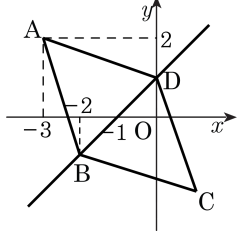
$(\overline{OQ}$ 의 기울기) $= \frac{a}{1}$

따라서, 두 직선의 기울기의 곱은

$$\left(\frac{-1}{a}\right) \times \left(\frac{a}{1}\right) = -1$$



49. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

50. 원점과 직선 $2x - y - 5 + k(x + 2y) = 0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라고 할 때, $\frac{1}{f(k)^2}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

해설

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

원점과 직선 $(2+k)x + (2k-1)y - 5 = 0$ 사이의 거리

$$f(k) \text{ 는 } f(k) = \frac{|-5|}{\sqrt{(2+k)^2 + (2k-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5(1+k^2)}}$$

$$\therefore \frac{1}{\{f(k)\}^2} = \frac{k^2 + 1}{5}$$

따라서, $k = 0$ 일 때, 최솟값 $\frac{1}{\{f(0)\}^2} = \frac{1}{5}$ 이다.