1. 두 수 $1+2i$, $1-2i$를 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식은?

① $x^2-2x-5=0$ ② $x^2+2x+5=0$

③ $x^2+5x+2=0$ ④ $x^2-2x+5=0$

⑤ $x^2-5x+2=0$

해설

$\alpha+\beta=(1+2i)+(1-2i)=2$

$\alpha\beta=(1+2i)(1-2i)=5$

$\therefore x^2-2x+5=0$

2. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

3. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a > 1$　② $a < -\frac{1}{3}$　③ $a \geq -\frac{1}{3}$

④ $a \leq -\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{3} < a < 1$

해설

$ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하는 경우는
전체에서 모든 실수 x에 대하여
$ax^2+(a+1)x+a < 0$인 경우를 제외하면 된다.
$ax^2+(a+1)x+a < 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$a < 0 \cdots$ ㉠
또, 이차방정식 $ax^2+(a+1)x+a = 0$의 판별식을 D라 할 때,
$D = (a+10)^2 - 4a^2 < 0,\ -3a^2+2a+1 < 0$
$3a^2-2a-1 > 0,\ (3a+1)(a-1) > 0$
$\therefore a < -\frac{1}{3}$ 또는 $a > 1 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $a < -\frac{1}{3}$
따라서 $ax^2+(a+1)x+a \geq 0$을 만족하는 실수가 존재하려면
$a \geq -\frac{1}{3}$이면 된다.

4. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$일 때, $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$\therefore\ ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

$=4\{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)\}$

$=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$

5. 임의의 실수 x에 대하여 등식 $(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$이 성립할 때, $a(b+c)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -30

해설

$(x-2)(x+2)^2 = (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
양변에 $x = 2, -2, 1$을 각각 대입하면
$0 = 1 + a + b + c,\ 0 = -27 + 9a - 3b + c,\ -9 = c$
세 식을 연립하여 풀면 $a = 5,\ b = 3,\ c = -9$
$\therefore\ a(b+c) = 5 \times (3-9) = -30$

해설

좌변을 전개한 후 조립제법으로 풀어도 좋다.
$(x-2)(x+2)^2$
$= x^3 + 2x^2 - 4x - 8$
$= (x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c$
$= (x-1)[(x-1)\{(x-1)+a\} + b] + c$

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
1 & 1 & 2 & -4 & -8 & & \\
 & & 1 & 3 & -1 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & -1 & \boxed{-9} & \leftarrow & \mathrm{c} \\
 & & 1 & 4 & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{b} & \\
 & & 1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{5} & \leftarrow \mathrm{a} & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ a(b+c) = 5(3-9) = -30$

6. $[a,\ b,\ c] = a(b^2 - c^2)$ 일 때, $[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$ 의 인수인 것은?

① $a - b$　　② $b + c$　　③ $c + a$

④ $a + b + c$　　⑤ abc

해설

$[a,\ b,\ c] + [b,\ c,\ a] + [c,\ a,\ b]$
$= a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$
$= ab^2 - ac^2 + bc^2 - ba^2 + ca^2 - cb^2$
$= a^2(c - b) - a(c^2 - b^2) + bc(c - b)$
$= (c - b)\{a^2 - a(c + b) + bc\}$
$= (c - b)(a - b)(a - c)$

7. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\frac{x+i}{x-i}$ 를 만족하는 실수 x의 값은 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ -5

해설

$(1+\sqrt{3}i)(x-i)=2(x+i)$

$(x+\sqrt{3})+(\sqrt{3}x-1)i=2x+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+\sqrt{3}=2x,\ \ \sqrt{3}x-1=2$

$\therefore\ x=\sqrt{3}$

8. x에 관한 이차방정식 $x^2-ax+a+1=0$의 두 근이 연속인 정수가 되게하는 상수 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 근을 $n,\ n+1$이라 하면

$$\begin{cases} n+(n+1)=a\cdots\cdots㉠ \\ n(n+1)=a+1\cdots\cdots㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $n=\dfrac{a-1}{2}\quad\cdots\cdots㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$\frac{a-1}{2}\left(\frac{a-1}{2}+1\right)=a+1$$

이것을 정리하면 $(a+1)(a-5)=0$

$a=-1,\ 5$

$\therefore -1+5=4$

9. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1	1	-2	1	0	-4
		-1	3	-4	4
2	1	-3	4	-4	0
		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

$(x+1)(x-2)(x^2 - x + 2) = 0$
따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근
허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

10. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$2x-2y+z=3x-y+z=x+2y-4z+10=2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=0$

▷ 정답 : $y=0$

▷ 정답 : $z=2$

해설

주어진 방정식을 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{cases} 2x-2y+z=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x-y+z=2 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+2y-4z=-8 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

따라서 ㉡ − ㉠에서

$x+y=0 \quad \cdots\cdots$ ㉣

㉠ × 4 + ㉢에서

$3x-2y=0 \quad \cdots\cdots$ ㉤

㉣ × 2 + ㉤에서 $5x=0$

$\therefore x=0,\ y=0$

$x=0,\ y=0$을 ㉠에 대입하면 $z=2$

11. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\frac{3b-2a}{a+b}=-\frac{1}{3}\ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3\ (\because \ b>0)$

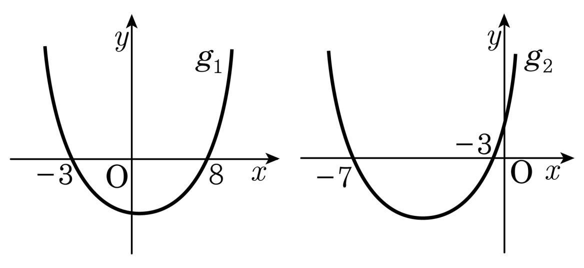
12. x에 관한 이차방정식 $x^2+(a^2-5a-6)x-a+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절대값보다 크거나 같을 때, 만족하는 정수 a의 값을 모두 더하면?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

해설

서로 다른 부호의 실근이므로 (두 근의 곱) <0
양근이 음근의 절대값보다 크거나 같으므로
(두 근의 곱) <0이므로
$-a+1<0 \quad \therefore a>1 \cdots$①
(두 근의 합) ≥ 0이므로
$-(a^2-5a-6)\geq 0$
$a^2-5a-6\leq 0$
$(a-6)(a+1)\leq 0$
$\therefore -1\leq a\leq 6 \cdots$②
①, ②에서 $a=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$
$\therefore\ 2+3+4+5+6=20$

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x+12)(x-2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

14. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면
$x=-1$을 대입하면 $R=29$
$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$
$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는
$Q(1)$, $x=1$ 식에 대입
$31=2Q(1)+29$
$\therefore\ Q(1)=1$

15. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$
② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$
③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$
④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$
⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

16. 방정식 $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2 < m < 3$ ② $2 \le m < 3$ ③ $-1 < m < 3$

④ $1 < m \le 3$ ⑤ $3 < m \le 4$

해설

두 근을 α, β라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \ge 0$

$m^2 - m - 2 \ge 0$, $(m-2)(m+1) \ge 0$

$\therefore\ m \le -1,\ m \ge 2$

(ii) $\alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore\ m > 1$

(iii) $\alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore\ m < 3$

$\therefore$ (i), (ii), (iii) 의 공통범위는 $2 \le m < 3$

17. 방정식 $x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B = 0$의 두 근이 -1과 -2일 때, 다른 두 근을 α, β라 하자. 이 때, $A + B - \alpha\beta$의 값을 구하면?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ 1　　⑤ 2

해설

$f(x) = x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B$라 하면 $-1, -2$가 근이므로
$f(-1) = 1 - A - 7 + A + 3B = 0$
$\therefore\ B = 2$
$f(-2) = 16 - 8A - 28 + 2A + 3B = 0,\ -6A + 3B - 12 = 0 \quad \therefore\ A = -1$
$\therefore\ A + B = -1 + 2 = 1 \cdots\cdots$ ㉠
$\therefore\ (x+1)(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 0$
따라서, 다른 두 근은 $x^2 - 4x + 3 = 0$의 근이다.
$\therefore\ \alpha\beta = 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $A + B - \alpha\beta = 1 - 3 = -2$

18. 복소수 $z_1 = 1 - i$에 대하여 $z_{n+1} = \overline{z_n} + (1+i)$이라 하자. $z_{100} = a + bi$라 할 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 실수이고 $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 98　② 99　③ 100　④ 101　⑤ 102

해설

$z_1 = 1 - i$

$z_2 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$

$z_3 = 2 - 2i + 1 + i = 3 - i$

$z_4 = 4 + 2i \cdots$

$\Rightarrow z_{2n} = 2n + 2i, z_{2n-1} = (2n-1) - i$ (n 은 자연수)

$\therefore z_{100} = 100 + 2i, a + b = 102$

19. n 이 자연수일 때, 이차함수 $y = 2n^2 - 11n + 20$ 의 최솟값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = 2n^2 - 11n + 20$

$= 2\left(n^2 - \frac{11}{2}n + \frac{121}{16}\right) - \frac{121}{8} + 20$

$= 2\left(n - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$

n 이 자연수이므로

$\frac{11}{4}$ 에 가장 가까운 자연수는 3 이다.

따라서 $n = 3$ 일 때,

최솟값 $2 \cdot 3^2 - 11 \cdot 3 + 20 = 5$ 를 갖는다.

20. $x,\ y,\ z$ 에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \ \cdots ㉠ \\ x - 3by + 2az = 0 \ \cdots ㉡ \\ x + 2by = 0 \ \cdots ㉢ \end{cases}$$

에서 $x,\ y,\ z$ 가 동시에 0 이 아닌 해가 존재하도록 0 이 아닌 양의 정수 $a,\ b$ 의 값을 정하면, 그 때의 $x : y : z$ 의 값은?

① $-1 : 1 : 5$ ② $-2 : 1 : 5$ ③ $-3 : 1 : 5$
④ $-4 : 1 : 5$ ⑤ $-5 : 1 : 5$

해설

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \ \cdots ㉠ \\ x - 3by + 2az = 0 \ \cdots ㉡ \\ x + 2by = 0 \ \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ $\times 2a-$ ㉡ 하면
$(2a-1)x - (2a^2 - 3b)y = 0 \ \cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 x 를 소거하면 $(2a^2 + 4ab - 5b)y = 0$
만일 $2a^2 + 4ab - 5b \neq 0$ 이면 $y = 0$
이것을 ㉢에 대입하면 $x = 0$
또, ㉠에서 $z = 0$ 이것은 $x = y = z = 0$ 이 되어 조건에 부적당하다.
따라서 $2a^2 + 4ab - 5b = 0$
b 에 대해 풀면 $b(4a-5) = -2a^2$, $b = \dfrac{-2a^2}{4a-5}$ 에서 우변이 정수가 되도록 정리하면

$$\begin{aligned} 8b &= \frac{-16a^2}{4a-5} \\ &= \frac{(4a-5)(-4a-5)-25}{(4a-5)} \\ &= -4a - 5 - \frac{25}{4a-5} \end{aligned}$$

위의 식에서 $|4a-5|$ 는 25 의 약수가 되어야 하므로
$\therefore\ 4a - 5 = \pm 1,\ \pm 5,\ \pm 25$ 0 이 아닌 a 의 양의 정수값은 $a = 1$
$\therefore\ b = 2$
㉠, ㉡에서 $x = -4y,\ z = 5y$
$\therefore\ x : y : z = (-4) : 1 : 5$