1. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ② $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

1	1	0	1	−2
		1	1	2
	1	1	2	0

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

2. 방정식 $x^3 - x = 0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -1$

▷ 정답 : $x = 0$

▷ 정답 : $x = 1$

해설

좌변을 인수분해 하면

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$

$\therefore\ x = -1, 0, 1$

3. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1,\ x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

4. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
$x^2 = t$ 로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(i) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ii) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

5. 방정식 $x^3 - x^2 + ax - 1 = 0$의 한 근이 -1일 때, 상수 a의 값과 나머지 두 근을 구하면?

① $a = 3, 1 \pm \sqrt{2}$

② $a = -3, 1 \pm \sqrt{2}$

③ $a = 3, 1 \pm \sqrt{3}$

④ $a = -3, 1 \pm \sqrt{3}$

⑤ $a = -1, 1 \pm \sqrt{2}$

해설

$x = -1$이 근이므로 $-1 - 1 - a - 1 = 0$에서 $a = -3$
인수정리와 조립제법을 이용하면
(좌변) $= (x+1)(x^2 - 2x - 1) = 0$
$x^2 - 2x - 1 = 0$의 근은 $1 \pm \sqrt{2}$
$\therefore a = -3$, 나머지 근은 $1 \pm \sqrt{2}$

6. $x,\ y$에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a 값은?

① $a = -1$ ② $a = 1$

③ $a = \pm 1$ ④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a},\ -a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

7. 다음 연립방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=1 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-z=2 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $y=2$

▷ 정답 : $z=3$

해설

①+②에서 $3x+2y=7$ $\cdots\cdots$④

①+③에서 $2x+3y=8$ $\cdots\cdots$⑤

④, ⑤를 연립하여 풀면 $x=1,\ y=2$

이 값을 ①에 대입하면 $z=3$

$\therefore\ x=1,\ y=2,\ z=3$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x+y+z=4 & \cdots\cdots ① \\ x-y-2z=3 & \cdots\cdots ② \\ x+2y-3z=-1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$ 을 만족하는 $x,\ y,\ z$를 순서대로 구하면?

① $-1, 0, 1$　② $5, -1, 1$　③ $4, 0, 1$

④ $4, -1, 1$　⑤ $4, -1, 3$

해설

① − ② 에서 $2y+3z=1 \cdots\cdots$ ④

② − ③ 에서 $-3y+z=4 \cdots\cdots$ ⑤

④ − ⑤ × 3 에서 $y=-1$을 ⑤에 대입하면 $z=1$

또, $y=-1,\ z=1$ 을 ①에 대입하면 $x=4$

$\therefore\ x=4,\ y=-1,\ z=1$

9. 다음 연립방정식의 해를 $x=\alpha,\ y=\beta,\ z=\gamma$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 2x-3y+3z=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x+y-2z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x-2y+z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

㉠ − ㉢ × 3 을 하면 $-x+3y=-5$ ……㉣

㉡ + ㉢ × 2 를 하면 $5x-3y=13$ ……㉤

㉣ + ㉤ 을 하면 $4x=8 \quad \therefore\ x=2$

$x=2$ 를 ㉣에 대입하면 $-2+3y=-5 \therefore\ y=-1$

또, $x=2,\ y=-1$ 을 ㉢에 대입하면

$2-2\cdot(-1)+z=5$

$\therefore\ z=1$

$\therefore\ x=2,\ y=-1\ ,\ z=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=4+1+1=6$

10. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots \text{㉠} \\ 2y+3z=0 & \cdots\cdots \text{㉡} \\ x+3z=0 & \cdots\cdots \text{㉢} \end{cases}$

의 해를 $x=a, y=b, z=c$라 할 때, $a(b+c)$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

㉡ − ㉢에서 $2y-x=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ㉣

㉠ + ㉣에서 $4y=2 \quad \therefore\ y=\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots$ ㉤

㉠, ㉡, ㉤ 에서 $x=1,\ z=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a(b+c)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$

11. 연립방정식 $\begin{cases} x+2y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2y+3z=-2 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3z+x=-5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$ 를 풀면 $x=\alpha, y=\beta, z=\gamma$ 이다.

이때, $\alpha\beta\gamma$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

주어진 세 식을 변변끼리 더하면

$2(x+2y+3z)=-2$, 즉 $x+2y+3z=-1$ $\cdots\cdots ㉣$

㉣ − ㉡을 하면 $x=1$

㉣ − ㉢을 하면 $y=2$

㉣ − ㉠을 하면 $z=-2$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma=xyz=-4$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=3 \\ z+x=4 \end{cases}$ 를 만족하는 $x,\ y,\ z$를 구할 때, $x^2+y^2+z^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$\begin{cases} x+y=1 \cdots ㉠ \\ y+z=3 \cdots ㉡ \\ z+x=4 \cdots ㉢ \end{cases}$$

$㉠+㉡+㉢ \Rightarrow 2(x+y+z)=8$

$x+y+z=4 \cdots ㉣$

$㉣-㉠ \Rightarrow z=3$

$㉣-㉡ \Rightarrow x=1$

$㉣-㉢ \Rightarrow y=0$

$\therefore x^2+y^2+z^2=10$

13. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y+z=12 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+2z=5 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 라 할 때, abc 의 값은?

① -14 ② -7 ③ 0 ④ 7 ⑤ 14

해설

$\begin{cases} 2x+y+z=12 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+2y+z=3 & \cdots\cdots ㉡ \\ x+y+2z=5 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉠ + ㉡ + ㉢을 하면 $4(x+y+z)=20$

$\therefore\ x+y+z=5 \quad \cdots\cdots ㉣$

㉠ − ㉣ 에서 $x=7$

㉡ − ㉣ 에서 $y=-2$

㉢ − ㉣ 에서 $z=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-2,\ c=0$

$\therefore\ abc=0$

14. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 & \cdots \text{㉠} \\ x - y = 1 & \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$ 로 변형하여

㉠에 대입하면

$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$

$2x = 3$

$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

15. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x=2y+1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$ 을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 \\ x^2+2xy-3y^2=-4 \end{cases}$ 의 해를 $x=a,\ y=b$라 할 때, 다음 중 a 또는 b의 값이 될 수 없는 것은?

① $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ⑤ -1

해설

$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=0 & \cdots① \\ x^2+2xy-3y^2=-4 & \cdots② \end{cases}$

①에서 $(x+y)(x+2y)=0$,

$x=-y, x=-2y$

i) $x=-y$를 ②에 대입 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1, x=\pm1$(복호동순)

ii) $x=-2y$를 ②에 대입 $y^2=\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}, x=\mp\frac{4\sqrt{3}}{3}$(복호동순)

그러므로 $x,\ y$값이 될 수 없는 것은

② $\frac{1}{3}$

17. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 \\ y^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 1

해설

$\begin{cases} x^2 - xy - 2 = 0 & \cdots ① \\ y^2 - xy - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$

상수항을 소거하기 위해 ① $-$ ② $\times 2$를 계산하여 정리하면

$x^2 + xy - 2y^2 = 0,\ (x + 2y)(x - y) = 0$

$\therefore\ x = y,\ x = -2y$각각을 ① 식에 대입하면

i) $x = y$일 때 $x^2 - x^2 - 2 = 0,\ -2 = 0$ 불능

ii) $x = -2y$일 때 $4y^2 + 2y^2 - 2 = 0$ $\begin{cases} y^2 = \frac{1}{3} \\ x^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$

$x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 - \beta^2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$

18. 연립방정식 $xy = z,\ yz = x,\ zx = y$를 만족하는 0이 아닌 실수해 $x,\ y,\ z$의 쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개

④ 8개 ⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$를 대입하면 $z^2 = 1,\ z = \pm 1$

(i) $z = 1$을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$xy = 1,\ x = y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ -1,\ 1)$

(ii) $z = -1$을 주어진 연립방정식에 대입하면

$xy = -1,\ x = -y$

$\therefore\ (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1)$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 $(x,\ y,\ z)$는 모두 4개이다.

19. 연립방정식 $\begin{cases} 2x+y=k \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 가 오직 한 쌍의 해를 가질 때, 상수 k 의 값은?

① ± 1 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 7 ⑤ ± 9

해설

$$\begin{cases} 2x+y=k & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $y=k-2x$ 를 ㉡에 대입하면

$x^2+(k-2x)^2=5$

$5x^2-4kx+k^2-5=0$ 이 중근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5\left(k^2-5\right)=0$

$-k^2+25=0,\ k^2=25$

$\therefore\ k \pm 5$

20. 다음 방정식을 만족하는 실수 $x,\ y$의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: -3

▷ 정답: 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, $x,\ y$가 실수이므로 $xy-2,\ 2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 $x,\ y$의 값은 $x=\pm1,\ y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 $x,\ y$의 합은 $-3, 3$