

1. 기울기가 3 이고 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.(단, a, b 는 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

기울기가 3 이고 점 $(-2, 3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = 3(x + 2) + 3 = 3x + 9$$

따라서 $a = 3, b = 9$

$$\therefore a + b = 12$$

2. 점 $(2, -1)$ 을 지나고, 기울기가 -3 인 직선의 방정식이 $ax+by-5=0$ 일 때 $a+b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

점 (x_1, y_1) 을 지나고 기울기가 m 인
직선의 방정식은 $y - y_1 = m(x - x_1)$ 이므로
구하는 직선의 방정식은 $y - (-1) = -3(x - 2)$
즉 $y = -3x + 5 \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 직선의 방정식의 일반형으로 고치면
 $3x + y - 5 = 0$
 $\therefore a + b = 3 + 1 = 4$

3. 점 $(1, -\sqrt{3})$ 을 지나고 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 방정식은?

① $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$

② $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$

③ $y = x - \sqrt{3}$

④ $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$

⑤ $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

해설

기울기가 $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ 이고,
점 $(1, -\sqrt{3})$ 을 지나므로

$$y - (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}(x - 1)$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

4. 두 점 $(1, 3)$, $(a, 5)$ 를 지나는 직선의 기울기가 3일 때, a 의 값은?

- ㉠ $\frac{5}{3}$ ㉡ 2 ㉢ $\frac{7}{3}$ ㉣ $\frac{8}{3}$ ㉤ 3

해설

$$\frac{5-3}{a-1} = 3 \text{ 에서 } a = \frac{5}{3}$$

5. <보기>중 직선 $y = 3x - 2$ 와 y절편이 같은 직선을 모두 고른 것은?

<보기>

$\textcircled{\text{㉠}} \ y = 3(x - 2)$

$\textcircled{\text{㉡}} \ y = 3x - 1$

$\textcircled{\text{㉢}} \ y = 2(x - 1)$

$\textcircled{\text{㉣}} \ x + y + 2 = 0$

- ① $\textcircled{\text{㉠}}$

② $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$

③ $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉢}}$

④ $\textcircled{\text{㉡}}, \textcircled{\text{㉢}}$

⑤ $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$

해설

주어진 직선 $y = 3x - 2$ 에 $x = 0$ 을 대입하면 $y = -2$, 즉, y절편이 -2 이므로 <보기>중 절편이 -2 인 직선을 찾으면 된다.

$\textcircled{\text{㉠}} \ x = 0$ 일 때 $y = 3 \times (-2) = -6$ 즉, y절편이 -6 이다.

$\textcircled{\text{㉡}} \ x = 0$ 일 때 $y = -1$ 즉, 절편이 -1 이다.

$\textcircled{\text{㉢}} \ x = 0$ 일 때 $y = 2 \times (-1) = -2$ 즉, y절편이 -2 이다.

$\textcircled{\text{㉣}} \ x = 0$ 일 때 $y + 2 = 0$ 따라서 $y = -2$ 즉, y절편이 -2 이다.

따라서, 직선 $y = 3x - 2$ 와 y절편이 같은 직선은 $\textcircled{\text{㉢}}, \textcircled{\text{㉣}}$ 이다.

6. 점 (1, 2) 를 지나고, x 축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = 2$

해설

점 (1, 2) 를 지나고 x 축에 평행한 직선이므로
 $\therefore y = 2$

7. 세 점 $(3, 1)$, $(-2 + a, 4)$, $(7, a)$ 가 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 점 $A(3, 1)$, $B(-2 + a, 4)$, $C(7, a)$ 가

동일 직선 위에 있으려면

(직선 AB의 기울기) = (직선 BC의 기울기) 이므로

$$\frac{4 - 1}{-2 + a - 3} = \frac{a - 4}{7 - (-2 + a)}$$

$$\frac{3}{a - 5} = \frac{a - 4}{9 - a}$$

$$27 - 3a = a^2 - 9a + 20$$

$$a^2 - 6a - 7 = (a + 1)(a - 7) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 양수 a 의 값은 7

8. 다음 두 직선 $y = (2a + 1)x - a + 2$, $y = (a + 2)x + 2$ 가 평행할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

기울기가 같아야 하므로 $2a + 1 = a + 2$
y 절편이 달라야 하므로 $-a + 2 \neq 2$, $a \neq 0$
 $\therefore a = 1$

9. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$ 이 평행할 때의 a 값이 $\frac{1}{n}$ 이다. n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}\frac{a}{a'} &= \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \text{에서} \\ \frac{a-2}{a} &= \frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{3} \quad (a \neq 0) \\ \therefore 3a &= -a+2 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \\ \therefore n &= 2\end{aligned}$$

10. 두 점 $A(3, 2), B(1, 4)$ 를 연결하는 선분의 중점을 지나고 $2x + y - 1 = 0$ 에 수직인 직선을 l 이라 할 때, 다음 중 직선 l 위에 있는 점은?

- ① $\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ ② $\left(-6, -\frac{3}{2}\right)$ ③ $(0, 2)$
④ $(1, 1)$ ⑤ $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

해설

두 점 $A(3, 2), B(1, 4)$ 의 중점 M 의 좌표는 $(2, 3)$ 이고, 직선 $2x + y - 1 = 0$ 에 수직인

직선의 기울기 m 은 $(-2) \cdot m = -1$ 에서 $m = \frac{1}{2}$

이 때, 구하는 직선 l 의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}(x - 2) + 3 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 2$$

따라서, 이 직선 위의 점은 $(0, 2)$ 이다

11. 두 직선 $x + y + 4 = 0$, $2x - y - 1 = 0$ 의 교점의 좌표는?

① (1, 3)

② (1, -3)

③ (-1, 3)

④ (-1, -3)

⑤ (-3, 1)

해설

두 직선의 방정식으로 이루어진 연립방정식의 해를 좌표로 갖는 점이 두 직선의 교점이다.

두 직선 $x + y + 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$, $2x - y - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x = -1$, $y = -3$

따라서 교점의 좌표는 $(-1, -3)$ 이다.

12. 점 $(4, 3)$ 과 직선 $5x - 12y + 3 = 0$ 사이의 거리를 d_1 , 점 $(4, 3)$ 과 직선 $12x + 5y - 50 = 0$ 사이의 거리를 d_2 라고 할 때, d_1 과 d_2 사이의 관계는?

- ① $d_1 = d_2$ ② $d_1 = d_2 + 1$ ③ $d_1 + 1 = d_2$
④ $d_1 = d_2 + 2$ ⑤ $d_1 + 2 = d_2$

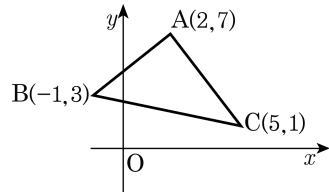
해설

$$d_1 = \frac{|5 \cdot 4 - 12 \cdot 3 + 3|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{|-13|}{\sqrt{169}} = 1$$

$$d_2 = \frac{|12 \cdot 4 + 5 \cdot 3 - 50|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{169}} = 1$$

따라서 $d_1 = d_2$

13. 세 점 A(2, 7), B(-1, 3), C(5, 1)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때, 다음 중 두 점 A, G를 지나는 직선의 방정식은?



- ① $x - y - 2 = 0$ ② $x + y - 2 = 0$ ③ $x - 2 = 0$
④ $3x - y + 1 = 0$ ⑤ $4x + y - 1 = 0$

해설

두 점 A, G를 지나는 직선은 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나므로 점 A와 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 된다.

$\overline{BC}$ 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{3+1}{2} \right)$$

따라서, 두 점(2, 7)과(2, 2)를 지나는 직선의 방정식은 $x = 2$ 이다.

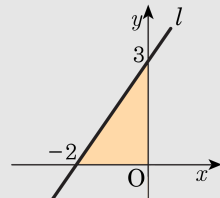
14. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 이 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$ 을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

15. $ac < 0$, $bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots \textcircled{1}$$

$ac < 0$, $bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 $\textcircled{1}$ 은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

16. 세 점 $A(8, 0)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 6)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 수심의 좌표를 구하면?

① $(0, -1)$

② $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$

③ $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

④ $(-5, 3)$

⑤ $\left(0, \frac{16}{3}\right)$

해설

삼각형의 세 수선은 한 점에서 만나므로

C에서 $\overline{AB}$ 에 내린 수선 ... (1) 과

B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선 ... (2) 의

교점을 구한다.

$\overline{AB}$ 의 기울기는 0

$\therefore$ (1)은 $x = 0$

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $-\frac{3}{4}$

$\therefore$ (2)는 $y = \frac{4}{3}(x + 4)$

두 식을 연립하면 $x = 0, y = \frac{16}{3}$

17. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

(0,0), (2,6), (6,3)

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

18. 두 직선 $x - 3y + 5 = 0$, $x + 9y - 7 = 0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 30° 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x + by + c = 0$ 일 때 $b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2, 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 2)$

$$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0$$

$$\therefore b = -\sqrt{3}, c = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore b + c = 2$$

19. 「 m, n 을 서로소인 자연수라 할 때, 좌표평면위의 두 점 $P(m, 0)$, $Q(0, n)$ 을 잇는 선분 PQ 위에는 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수인 점이 존재하지 않는다.」를 다음과 같이 증명하였다.

<증명>

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 방정식은

(가)

 이다. 따라서 $nx + my = mn$ ($0 < x < m, 0 < y < n$) 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면 $my = n(m - x)$ 좌변이 m 의 배수이므로 우변도 m 의 배수이고, m, n 이 서로소이므로

(나)

 는 m 의 배수가 된다. 이것은 $0 < m - x < \div(다)$

 에 모순이다.

위

의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① $nx + my = 1, m - x, m$

② $nx + my = 1, m + x, 2m$

③

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m - x, m$

④ $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, m + x, 2m$

⑤ $nx + my = 1, m + x, n$

해설

두 점 P, Q 를 지나는 직선의 x 절편, y 절편이 각각 m, n 이므로
 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1 \Leftrightarrow nx + my = mn \cdots \cdots \textcircled{가}$
 $\textcircled{가}$ 을 만족하는 자연수 x, y 가 존재한다고 가정하면
 $my = n(m - x)$ 에서 m, n 이 서로소이므로 $m - x$ 는 m 의 배수가 된다.
이것은 $0 < m - x < m$ 에 모순이다.

20. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

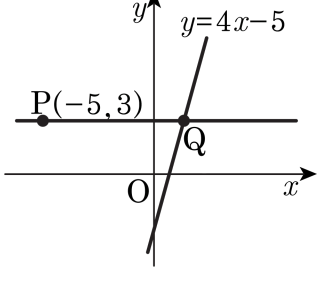
▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1, 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$

21. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $P(-5, 3)$ 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 일차함수 $y = 4x - 5$ 의 그래프와 만나는 점을 Q 라 한다. $\overline{PQ}$ 의 길이는?



- ① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

해설

점 P를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y = 3$ 이다.
점 Q의 y 좌표가 3이므로
 $y = 4x - 5$ 에 $y = 3$ 을 대입하면 $3 = 4x - 5$
 $\therefore x = 2$
따라서 점 Q의 좌표는 (2, 3)이다.
 $\therefore PQ = 2 - (-5) = 7$

22. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$, $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$ 가 일직선 위에 있을 때, k 의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

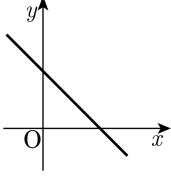
세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2 + 7k + 12 = 0$

$\therefore k$ 의 값의 곱은 12이다.

23. 직선 $ax + by + c = 0$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $cx + by + a = 0$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면은?



- ① 제 1 사분면
- ② 제 2 사분면
- ③ 제 3 사분면
- ④ 제 4 사분면
- ⑤ 제 1, 3 사분면

해설

직선 $ax + by + c = 0$ 은

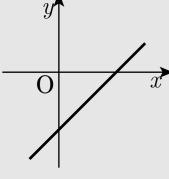
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 이므로

$-\frac{a}{b} < 0, -\frac{c}{b} > 0$ 이다.

구하는 직선은 $y = -\frac{c}{b}x - \frac{a}{b}$ 이므로

그래프는 다음과 같다.

따라서 지나지 않는 사분면은 제2 사분면이다.



24. 점 A(0, 2), B(2, 0), C(3, 3) 으로 이루어진 삼각형ABC 가 있다. $\triangle ABC$ 가 직선 $(k+1)x + (k-1)y = 2(k-1)$ 에 의해 두 개의 도형으로 나누어지며, 한 쪽의 넓이가 다른 쪽 넓이의 두 배가 될 때의 k 값을 구하여라. (단, k 는 정수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

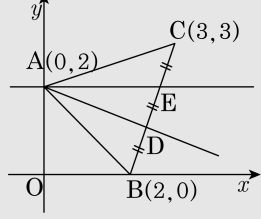
해설

$k(x+y-2) + x-y+2=0$ 은 k 에 관계없이

A(0, 2) 를 지나는 직선이므로

$\triangle ABC$ 를 그림과 같이

2 개의 삼각형으로 나누게 된다



따라서 $\overline{BC}$ 를 1 : 2 또는 2 : 1 로 내분하는

점D, E 를 지나게 된다.

$D\left(\frac{7}{3}, 1\right)$, $E\left(\frac{8}{3}, 2\right)$ 이므로

(i) D 를 지날 때,

$$k\left(\frac{7}{3} + 1 - 2\right) + \frac{7}{3} - 1 + 2 = 0$$

$$k = -\frac{5}{2} \text{ 이므로 부적합 } (\because k \text{ 는 정수})$$

(ii) E 를 지날 때,

$$k\left(\frac{8}{3} + 2 - 2\right) + \frac{8}{3} - 2 + 2 = 0$$

$$\therefore k = -1$$

25. x, y 에 관한 이차방정식 $2x^2 - 3xy + ay^2 - 2x + 9y + b = 0$ 이 직교하는 두 직선의 곱을 나타낼 때, ab 를 구하면?

- ① 2
- ② 4
- ③ 6
- ④ 8
- ⑤ 10

해설

준식이 나타내는 두 직선을
 $px + qy + r = 0 \cdots \textcircled{㉠}$,
 $p'x + q'y + r' = 0 \cdots \textcircled{㉡}$ 이라 하자.
 $\textcircled{㉠}$ 과 $\textcircled{㉡}$ 은 서로 직교하므로
 $pp' + qq' = 0$ 이다.
(준식) $= (px + qy + r)(p'x + q'y + r') = 0$ 의
전개식에서 x^2 의 계수와 y^2 의 계수의 합은
 $pp' + qq' = 0$ 이므로 $a + 2 = pp' + qq' = 0$
 $\therefore a = -2$
 $a = -2$ 를 준식에 대입하여 정리하면
(준식)
 $= 2x^2 - (3y + 2)x + (-2y^2 + 9y + b) = 0 \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉢}$ 이 두 직선의 곱을 나타내므로
 $\textcircled{㉢}$ 의 판별식 $D_1 = (3y + 2)^2 - 8(-2y^2 + 9y + b)$
 $= 25y^2 - 60y + (4 - 8b) \cdots \textcircled{㉣}$ 이 완전제곱식이다.
따라서 $\textcircled{㉣}$ 의 판별식 $\frac{D_2}{4}$ 는 0이다.
 $\frac{D_2}{4} = 30^2 - 25(4 - 8b) = 0$
 $\therefore b = -4$
 $\therefore ab = (-2) \cdot (-4) = 8$

26. 다음 두 직선 $y = (2a + 1)x - a + 2$, $y = (a + 2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$$(2a + 1)(a + 2) = -1$$

$$2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$(2a + 3)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } -\frac{3}{2}$$

27. 점 A(-1, 6) 에서 직선 $x - 2y + 3 = 0$ 에 그은 수선의 발을 H(a , b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

직선 $x - 2y + 3 = 0$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

직선 $x - 2y + 3 = 0$ 에 수직인 직선의 기울기는 -2 이다.

따라서 점 A(-1, 6) 을 지나고

직선 $x - 2y + 3 = 0$ 과 수직인 직선은

$$y - 6 = -2(x + 1)$$

$$\therefore 2x + y - 4 = 0$$

이 직선과 직선 $x - 2y + 3 = 0$ 의

교점의 좌표를 구하면 (1, 2)

그러므로 H(1, 2) 이므로, $\therefore a + b = 3$

28. 세 직선 $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x + y = k \\ kx - 5y = 5 \end{cases}$ 이 한점 $P(a, b)$ 에서 만날 때 $a + b$ 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$3x + y = 7 \cdots \textcircled{1}$$

$$2x + y = k \cdots \textcircled{2}$$

$$kx - 5y = 5 \cdots \textcircled{3}$$

①과 ②의 교점은 $(7 - k, -14 + 3k)$ 이므로

이를 ③에 대입하면,

$$k^2 + 8k - 65 = 0 \quad \therefore k = 5 \text{ 또는 } -13$$

$$\therefore P(a, b) = (2, 1) \text{ 또는 } (20, -53)$$

$$\therefore a + b \text{ 의 최댓값은 } 2 + 1 = 3$$

29. 두 점 A(-3, 1), B(5, 9) 를 이은 선분 AB 를 수직이등분하는 직선의 방정식에서 y 절편은?

- ① 4
- ② 5
- ③ 6
- ④ 7
- ⑤ 8

해설

A(-3, 1) B(5, 9)
 $M\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+9}{2}\right) = (1, 5)$
 $\overline{AB}$ 의 기울기: $\frac{1-9}{-3-5} = 1$
 $\overline{AB}$ 에 수직한 기울기는 -1
 $y = (-1) \cdot (x - 1) + 5 = -x + 6$
y 절편은 6

30. 두 직선 $2x + 3y + 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$ 의 교점을 지나고 직선 $x + 4y - 4 = 0$ 에 수직인 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -106 ② -105 ③ -104 ④ -103 ⑤ -102

해설

구하는 직선은 $(2x + 3y + 1) + k(x - 2y + 5) = 0$

$\therefore (2 + k)x + (3 - 2k)y + 5k + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$\textcircled{1}$ 과 직선 $x + 4y - 4 = 0$ 이 수직이므로

$$(2 + k) \cdot 1 + (3 - 2k) \cdot 4 = 0$$

$$14 - 7k = 0$$

$$\therefore k = 2$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $4x - y + 11 = 0$

$$\therefore y = 4x + 11$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4^2 - 11^2 = 16 - 121 = -105$$

31. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $P(a, b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k 에 관하여 정리하면

$$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$$

k 에 관한 항등식이므로

$$x+2=0, x^2+x-2=0, 1-y=0$$

$$\therefore x=-2, y=1$$

$$\therefore \text{구하는 점의 좌표는 } (-2, 1)$$

$$\therefore a=-2, b=+1$$

$$\therefore a+b=-1$$

32. 세 점 A(1, 2), B(-2, 3), C(3, -1) 에서 직선 $l : 3x + 4y - 1 = 0$ 까지의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3 라 할 때, d_1, d_2, d_3 의 크기를 바르게 비교한 것은?

- ① $d_1 < d_2 < d_3$ ② $d_1 < d_3 < d_2$ ③ $d_2 < d_3 < d_1$

- ④ $d_3 < d_2 < d_1$ ⑤ $d_3 < d_1 < d_2$

해설

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|3 + 8 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{|3 \times (-2) + 4 \times 3 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|-6 + 12 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_3 &= \frac{|3 \times 3 + 4 \times (-1) - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{|9 - 4 - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{4}{5} \text{ 에서} \end{aligned}$$

따라서 $d_3 < d_2 < d_1$

33. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하시오.

$3x - y - 6 = 0 \text{ , } \quad 3x - y + k = 0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

직선 $3x - y - 6 = 0$ 위의 한 점 $(2, 0)$ 에서 직선

$3x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$$\frac{|3 \times 2 - 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{|6 + k|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$|6 + k| = 10$$

따라서 $k = 4$ ($\because k$ 는 양수)

34. 점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 가 되도록 하는 실수 a 의 값들의 합은?

① $-\frac{1}{3}$

② 0

③ 1

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 $(a, 2)$ 에서 직선 $12x - 5y - 4 = 0$ 에 이르는 거리가 2 이므로

$$2 = \frac{|12a - 5 \times 2 - 4|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12a - 14|}{13}$$

$$\therefore |12a - 14| = 26 \text{ 즉, } 12a - 14 = 26$$

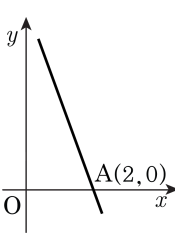
$$\text{또는 } 12a - 14 = -26 \therefore a = \frac{10}{3}$$

또는 $a = -1$ 따라서 실수 a 의 값의 합은

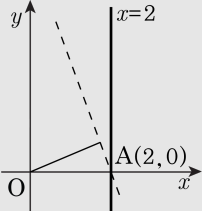
$$\frac{10}{3} + (-1) = \frac{7}{3}$$

35. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?

- ① 2
- ② 3
- ③ $2\sqrt{2}$
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ 4

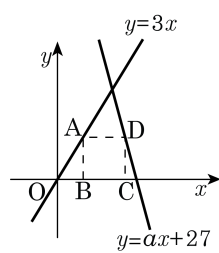


해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고
 y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여
원점 O 와 l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

36. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)

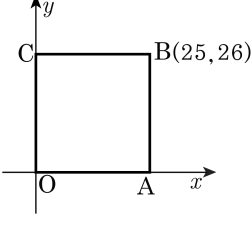


- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는
 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4$, $y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

37. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부 (경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

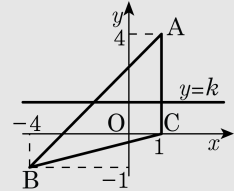
$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

(8, 4), (16, 7), (24, 10)으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

38. 좌표평면 위의 세 점 A(1, 4), B(-4, -1), C(1, 0)을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y = k$ 가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

- ① $4 - \sqrt{5}$ ② $4 - \sqrt{6}$ ③ $4 - \sqrt{7}$
 ④ $4 - 2\sqrt{2}$ ⑤ $4 - \sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y = \frac{-1-4}{-4-1}(x-1) + 4$

$\Rightarrow y = x + 3$

$\therefore y = k$ 와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3, k)$, $(1, k)$

$\Rightarrow$ 이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2} \times (1 - (k-3)) \times (4-k) = 5$

방정식을 풀면, $k = 4 \pm \sqrt{10}$

$\therefore k = 4 - \sqrt{10}$ ($\because k < 4$)

39. 세 직선 $2x+y+1=0$, $x-y+2=0$, $ax-y=0$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 상수 a 의 값을 구하면? (단, $a>0$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

삼각형을 만들지 못하게 하려면
 $ax-y=0$ 이 나머지 두직선과 평행하거나, 세 직선이 한 점에서 만나야 한다.
i) $ax-y=0$ 이 다른 두 직선과 평행할 때
두 직선의 기울기가 각각 $-2, 1$ 이므로
 $a=-2$ 또는 $1 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$
ii) 세 직선이 한 점에서 만날 때
 $2x+y+1=0$ 와 $x-y+2=0$ 의 교점은 $(-1, 1)$
 $ax-y=0$ 이 이 점을 지나려면
 $a=-1$ (부적당)
i), ii)에서 $a=1$

40. 두 직선 $y = -x + 3, y = mx + m + 2$ 이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha + \beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

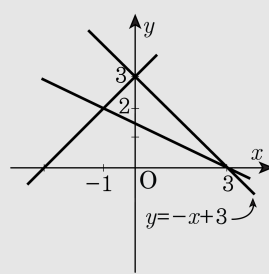
$m(x+1) - (y-2) = 0$ 에서 $y = mx + m + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1, 2)$ 를 지난다.

$(3, 0)$ 을 지날때 $m = -\frac{1}{2}$

$(0, 3)$ 을 지날때 $m = 1$

$\therefore -\frac{1}{2} < m < 1$

따라서 $2\alpha + \beta = 0$



41. 다음 두 직선 $2x + y - 2 = 0, mx - y - 3m + 5 = 0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

- ① $1 < m < \frac{5}{2}$ ② $1 \leq m < \frac{5}{2}$ ③ $1 < m \leq \frac{5}{2}$
 ④ $2 < m < \frac{5}{2}$ ⑤ $2 \leq m < \frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2} \right)$$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

$$\text{i) } \frac{3(m-1)}{m+2} > 0$$

$$\Rightarrow m < -2 \text{ 또는 } m > 1$$

$$\text{ii) } \frac{2(2m-5)}{m+2} < 0$$

$$\Rightarrow -2 < m < \frac{5}{2}$$

i), ii) 의 공통영역을 구하면 $1 < m < \frac{5}{2}$

해설

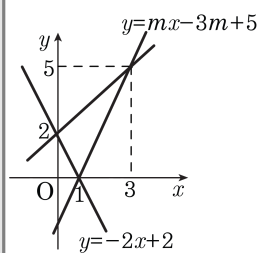
$2x + y - 2 = 0$ 의 x, y 절편의 좌표를

각각 구하면 $(1, 0), (0, 2)$ 이고

$y = m(x-3) + 5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m = 1, (1, 0)$

을 대입하면 $m = \frac{5}{2}$

$$\therefore 1 < m < \frac{5}{2}$$



42. (a, b) 가 직선 $x+y=1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax+by=1$ 은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?

- ① $(1, 1)$ ② $(1, 0)$ ③ $(0, 1)$
④ $(-1, -1)$ ⑤ $(-1, 0)$

해설

점 (a, b) 가 $x+y-1=0$ 위의 점이므로
 $a+b-1=0$ 에서 $b=1-a$
이때, $ax+by-1=ax+(1-a)y-1=0$
 $\rightarrow (x-y)a+y-1=0$
 $\therefore x-y=0, y-1=0$
즉 $x=y, y=1$
따라서 구하려는 정점은 $(1, 1)$ 이다.

43. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

44. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① -2
- ② -1 또는 2
- ③ 4
- ④ -2 또는 4
- ⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나는 직선의 방정식은 $x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로 나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면 $(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots \textcircled{1}$ 원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로 $\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$ 양변에 제곱하여 정리하면 $(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2, k^2=4$ $\therefore k=\pm 2$ 이것을 ①에 대입하여 정리하면 $3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$ 따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

45. 좌표평면에서 원점과 직선 $x+y-2+k(x-y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 실수)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

준식을 변형하면 $(1+k)x+(1-k)y-2=0$ 이므로

$$f(k) = \frac{|-2|}{\sqrt{(1+k)^2+(1-k)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

따라서, $k=0$ 일 때 $f(k)$ 의 최댓값은 $\sqrt{2}$

46. 원점 O 와 점 $A(10, 0)$ 으로부터 직선 $3x + 4y + 30 = 0$ 에 내린 수선을 각각 $\overline{OP}$, $\overline{AQ}$ 라 할 때, 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이는?

- ① 64 ② 72 ③ 80 ④ 81 ⑤ 90

해설

$$\overline{OP} = \frac{|30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 6$$
$$\overline{AQ} = \frac{|30 + 30|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 12$$
$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

따라서 사다리꼴 $OPQA$ 의 넓이를 S 라 하면,

$$S = \frac{1}{2} \cdot (\overline{OP} + \overline{AQ}) \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (6 + 12) \cdot 8 = 72$$