1. 다음 중 $A \subset B$인 관계인 것은?

① $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$

② $A = \{x \mid x$는 홀수$\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$

③ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\}$, $B = \{1, 2, 4\}$

④ $A = \{x \mid x$는 1의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3의 배수$\}$

⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

해설

① $A \subset B$
② $B \subset A$
③ $B \subset A$
④ $B \subset A$
⑤ 포함 관계가 없다.

2. 두 집합 $A = \{0,\ 5,\ 6\}$, $B = \{x-2,\ x+4,\ 5\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, x 의 값으로 옳은 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$A = B$ 이므로 $x-2=0$, $x+4=6$
$\therefore\ x=2$

3. $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 8\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(개) 이다.

4. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$

$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{7}$

5. 집합 $A = \{x \mid x$는 13보다 크고 27보다 작은 자연수$\}$의 부분집합 중에서 원소 14, 22 는 반드시 포함하고, 홀수는 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 32 개

해설

$A = \{14,\ 15,\ 16,\ \cdots,\ 26\}$ 의 부분집합 중 원소 14, 22는 반드시 포함하고, 홀수 15, 17, 19, 21, 23, 25 는 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$2^{13-2-6} = 2^5 = 32$ (개)

6. 두 집합
$A=\{x \mid x$는 '*mathematics*' 에 쓰인 자음$\}$,
$B=\{x \mid x$는 ' science ' 에 쓰인 자음$\}$
에 대하여 다음 보기의 알파벳 중 $A\cup B$ 의 원소가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$a, c, g, h, i, k, m, n, o, q, s, t$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : a

▷ 정답 : g

▷ 정답 : i

▷ 정답 : k

▷ 정답 : o

▷ 정답 : q

해설

$A=\{x \mid x$는 '*mathematics*' 에 쓰인 자음$\}=\{m,t,h,c,s\}$,
$B=\{x \mid x$는 ' science ' 에 쓰인 자음$\}=\{s,c,n\}$ 이다.
따라서 $A\cup B=\{m,t,h,c,s,n\}$

7. 전체집합 U의 두 부분집합 $A,\ B$에 대하여 다음 중 집합 $\{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B^c$과 항상 같은 집합은 ?

① $\varnothing$　② A　③ $A - B$　④ $A \cap B$　⑤ B^c

해설

분배법칙을 이용하여 펼쳐져 있는 부분을 다시 묶은 후 $A \cap B^c = A - B$임을 이용한다.

$\{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B^c = \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B^c = (A \cap U) \cap B^c$
$= A \cap B^c = A - B$

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$ ② $A - B = A \cup B^c$

③ $A \cap (A \cap B)^c = B - A$ ④ $(A - B)^c - B = A \cup B$

⑤ $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

해설

① $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

② $A - B = A \cap B^c$

③ $$\begin{aligned} A \cap (A \cap B)^c &= A \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= \varnothing \cup (A - B) = A - B \end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned} (A - B)^c - B &= (A \cap B^c)^c \cap B^c \\ &= (A^c \cup B) \cap B^c \\ &= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c) \\ &= (A \cup B)^c \cup \varnothing \\ &= (A \cup B)^c \end{aligned}$$

9. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$　② $a > 2$　③ $a < \frac{1}{2}$
④ $a > -\frac{1}{2}$　⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases}$$ 이고

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$는 증가함수이므로
$x < 0$일 때도 $f(x)$는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$\therefore\ a < \frac{1}{2}$

10. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \to X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1$ ($\because f(2) = 3$)
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

11. 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right)=x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$\frac{x+1}{5}=t$ 로 놓으면 $x=5t-1$
$f(t)=(5t-1)+2=5t+1$ 에서
$f(x)=5x+1$

$\therefore\ f(f(x))=f(5x+1)=5(5x+1)+1$
$=25x+6$
$\therefore\ f(f(10))=25\cdot 10+6=256$

12. 함수 $y=(x-2)^2-1(x\le 2)$ 의 역함수를 구하면?

① $y=\sqrt{x-1}+2\ (x\ge 1)$

② $y=\sqrt{x+1}+2\ (x\ge -1)$

③ $y=-\sqrt{x+1}+2\ (x\ge -1)$

④ $y=-\sqrt{x+1}-2\ (x\ge -1)$

⑤ $y=-\sqrt{x-1}+2\ (x\ge 1)$

해설

$y=(x-2)^2-1\ \ (x\le 2,\ y\ge -1)$

역함수 $x=(y-2)^2-1\ \ (y\le 2,\ x\ge -1)$

$x+1=(y-2)^2$

$y=2\pm\sqrt{x+1}$

$y\le 2$ 이므로, $y=-\sqrt{x+1}+2$

$\therefore\ y=-\sqrt{x+1}+2\ (x\ge -1)$

13. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a)+f(b)=f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(2)=\alpha$, $f(3)=\beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha+\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a)+f(b)=f(ab)$ 에 $a=2$, $b=3$ 을 대입하면
$f(2)+f(3)=f(6)$
$\therefore\ f(6)=\alpha+\beta$
$\therefore\ f^{-1}(\alpha+\beta)=6$
$\therefore\ g(\alpha+\beta)=6$

14. $-4 \le x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 10 개

해설

i) $-4 \le x < -2$ 일 때,

$-2 \le \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

ii) $-2 \le x < 0$ 일 때,

$-1 \le \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \le x < 2$ 일 때,

$0 \le \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

iv) $2 \le x < 4$ 일 때,

$1 \le \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4 개이다.

15. $-1 < a < 3$일 때, $\sqrt{a^2+2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

(준식) $= \sqrt{(a+1)^2}+\sqrt{(a-3)^2}$
$= |a+1|+|a-3| = (a+1)-(a-3) = 4$

16. $\sqrt{6-\sqrt{20}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $a+\frac{3}{b}$이 값은?

① $3+\sqrt{5}$　② $3+\sqrt{6}$　③ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$
④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$　⑤ $7+3\sqrt{5}$

해설

$\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}$
$=\sqrt{5}-1=1.\cdots$
정수부분 : 1　소수부분 : $\sqrt{5}-2$
$\therefore\ a+\frac{3}{b}=1+\frac{3}{\sqrt{5}-2}=1+3(\sqrt{5}+2)=7+3\sqrt{5}$

17. $x = \dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, x^2+xy+y^2 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 11

해설

$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

$x+y = 2\sqrt{3},\ xy = 1$

$x^2+xy+y^2 = (x+y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$

18. $x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, x^2-x-2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 에서 $2x=\sqrt{5}+1$

$2x-1=\sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=5$ $\therefore$ $x^2-x-1=0$

$\therefore$ $x^2-x-2=x^2-x-1-1=0-1=-1$

19. 4와 102사이에 5개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102사이에 넣을 5개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 265

해설

항의 개수가 7개 이므로 7개 항의 합을 S_7, 구하는 수의 합을 S라 하면

$S = S_7 - (4 + 102) = \dfrac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$

20. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$S_{10} = a_{11}$

$S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$a_{11} = a + 10d$

$\dfrac{10(2a+9d)}{2} = 10a + 45d$

$10a + 45d = a + 10d$

$9a = -35d$

$a = 35$ 이므로 $d = -9$

$\therefore S_{10} = \dfrac{10(2a+9d)}{2}$

$= \dfrac{10(70-81)}{2}$

$= \dfrac{-110}{2} = -55$

21. 세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $a+b=17$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

세 수 a, 8, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ab=8^2=64$
또, 조건에서 $a+b=17$이므로
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=17^2-2\cdot64=161$

22. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제 6항까지의 합이 252인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

① 2^7 ② 2^8 ③ 2^9 ④ 2^{10} ⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a, 공비를 $r(r \neq 1)$라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_3 = \dfrac{a(r^3-1)}{r-1} = 28 \cdots\cdots$ ㉠

$S_6 = \dfrac{a(r^6-1)}{r-1} = 252 \cdots\cdots$ ㉡

㉡을 변형하면

$\dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 252,$

$\dfrac{a(r^3-1)}{r-1} \cdot (r^3+1) = 252$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$28(r^3+1) = 252,\ r^3+1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$

r는 실수이므로 $r = 2 \cdots\cdots$ ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $7a = 28 \quad \therefore a = 4$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$

23. 수열 $1,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\cdots$ 의 제125항은?

① $\frac{15}{16}$ ② $\frac{7}{8}$ ③ $\frac{13}{16}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

해설

이 수열을 다음과 변형해서 분모가 같은 것까지 묶으면 군수열이 만들어진다.

$(1),\ \left(\frac{2}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4}\right),\cdots$

따라서 제n군까지의 항수는

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 이고,

$\frac{15\times 16}{2} = 120$ 이므로

제125항은 제16군의 5번째 항이 된다.

제16군은

$\left(\frac{16}{16},\ \frac{15}{16},\ \frac{14}{16},\ \frac{13}{16},\ \frac{12}{16},\ \frac{11}{16},\cdots,\ \frac{1}{16}\right)$ 이므로

제125항은 5번째 항인 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 이다.

24. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

· $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
· $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore\ p = 3,\ q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

25. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> (i) $n=1$일 때,
> (좌변) $=1^2=1$, (우변) $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$
> 이므로 주어진 등식은 성립한다.
> (ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
> 양변에 $\boxed{(가)}$를 더하면
> $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(가)}$
> $=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(가)}=\frac{1}{6}k(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$
> $=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
> 따라서, $n=\boxed{(나)}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
> (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① k, k^2 ② k, $(k+1)^2$
③ $k+1$, k ④ $(k+1)^2$, k
⑤ $(k+1)^2$, $k+1$

해설

(ii) $n=k$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots++k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$
양변에 $n=\boxed{(k+1)^2}$를 더하면
$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(k+1)^2}$
$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(k+1)^2}=\frac{1}{6}k(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$
$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$
따라서, $n=\boxed{k+1}$일 때에도 주어진 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

26. $\log_2 x + \log_2 y = \frac{3}{2}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x+2y$ 의 최솟값을 m 이라 하고 그때의 x, y 의 값을 각각 a, b 라 하자. 이때, $\frac{am}{b}$ 의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$　② $2^{\frac{3}{2}}$　③ $2^{\frac{9}{4}}$　④ $2^{\frac{5}{2}}$　⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$\log_2 x + \log_x y = \log_2 xy = \frac{3}{2}$ $\therefore xy = 2^{\frac{3}{2}}$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$

따라서 $x+2y$ 의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

(단, 등호는 $x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}}$ 일 때 성립한다.)

$a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}}$

$\frac{am}{b} = 2^{(\frac{5}{4}+\frac{9}{4})-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}$

27. $\log_2 x = 5.2$ 일 때, $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 ? (단, $\log 2 = 0.30$)

① 0.32 ② 0.36 ③ 0.40 ④ 0.44 ⑤ 0.48

해설

$\log_2 x = 5.2$ 이므로 $\frac{\log x}{\log 2} = 5.2, \log x = 1.56$

$\log \frac{1}{x} = -\log x = -1.56 = -2 + 0.44$

$\therefore \log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 0.44

28. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a\sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \le A < 3$
② $\frac{3}{2} < A \le 3$
③ $2\sqrt{2} \le A < 3\sqrt{3}$
④ $3 \le A < \frac{9}{2}$
⑤ $3 < A \le \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \le \log a < 3$

$\log a\sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log a$

$\frac{3}{2} \times 2 \le \frac{3}{2}\log a < \frac{3}{2} \times 3$

$\therefore 3 \le A < \frac{9}{2}$

29. 소리를 발생하는 음원의 음향 파워레벨(L)의 단위를 데시벨(dB)이라 하며 그 크기가 다음과 같다.

$L = 10\log\frac{W}{10^{-12}}$ (단 W는 음원의 음향파워이고 단위는 와트/m^2)

음향 파워가 10^{-8}(와트/m^2)인 음원의 음향파워레벨은 몇 데시벨인지 구하면?

① 8 ② 12 ③ 26 ④ 40 ⑤ 64

해설

주어진 식에 음향 파워가 10^{-8}(와트/m^2)를 대입하면

$$L = 10\log\frac{10^{-8}}{10^{-12}}$$
$$= 10\log\frac{1}{10^{-4}}$$
$$= 10 \times 4 = 40dB$$

30. 연이율 5% 의 복리로 이자를 계산하는 정기예금에 1000 만 원을 20 년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, $\log 1.05 = 0.02$, $\log 2.51 = 0.40$ 으로 계산한다.)

① 2100 만원　② 2110 만원　③ 2130 만원
④ 2150 만원　⑤ 2170 만원

해설

1000 만원을 20 년 동안 연이율의 5% 의 복리로 예금하였을 때의 원리합계는
$1000(1+0.05)^{20} = 1000 \times 1.05^{20}$(만원)
1.05^{20} 에 상용로그를 취하면
$\log 1.05^{20} = 20 \log 1.05 = 20 \times 0.02 = 0.4$
이때, $\log 2.51 = 0.40$ 이므로 $1.05^{20} = 2.51$
따라서 구하는 원리합계는 $1000 \times 2.51 = 2150$(만원)

31. 다음 보기의 밑줄 친 것 중에서 기준이 명확한 것은 몇 개인가?

보기

㉠ 우리 반에서는 100 m 를 잘하는 학생들을 뽑아 방과 후에 1 시간씩 달리기 연습을 한다.
㉡ 우리 반에서 인기가 좋은 학생을 반장 후보로 세울 것이다.
㉢ 운동을 잘하는 학생은 집중력이 좋다.
㉣ 평균이 85 점 이상인 학생은 우등생이다.
㉤ 월드컵 성적이 비교적 좋은 나라들의 모임
㉥ 영토가 아름다운 국가의 모임
㉦ 10 에 가장 가까운 자연수의 모임

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ '잘하는' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
㉡ '좋은' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
㉢ '잘하는' 이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
㉤ '비교적' 이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
㉥ '아름다운' 은 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.

32. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A = B = C$ 가 되지 <u>않는</u> 경우를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A \subset C$	㉡ $A = C$
㉢ $C \subset A$	㉣ $A = B$

① ㉠, ㉡   ② ㉠, ㉣   ③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣   ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $A = B = C$ 가 아니어도 항상 $A \subset C$ 이다.

㉣ $A = B \subset C$ 일 때, $C \subset B$ 인지 알 수 없으므로 $A = B = C$ 가 아니다.

33. $x > 2$일 때, $2x-3+\dfrac{1}{x-2}$의 최솟값을 a, 그 때의 x의 값을 b라 할 때, $a+2b$의 값을 구하면?

① $5+\sqrt{2}$　　② $5+2\sqrt{2}$　　③ $5+3\sqrt{2}$

④ $5+4\sqrt{2}$　　⑤ $5+6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$2x-3+\frac{1}{x-2}=2(x-2)+\frac{1}{x-2}+1$$
$$\geq 2\sqrt{2(x-2)\times\frac{1}{x-2}}+1$$
$$\geq 2\sqrt{2}+1$$

$\therefore a=2\sqrt{2}+1$

$2(x-2)=\dfrac{1}{x-2}$ 에서

$2(x-2)^2=1,\ (x-2)^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

$x>2$ 이므로 $b=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ a+2b=2\sqrt{2}+1+\sqrt{2}+4=5+3\sqrt{2}$

34. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $a_8 - a_7$의 값은?

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{64}$ ③ $\frac{1}{128}$ ④ $\frac{1}{256}$ ⑤ $\frac{1}{512}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$

$(a_{n+1} - \alpha) = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$

$-\frac{1}{2}\alpha + \alpha = 1 \ \therefore \alpha = 2$

$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$

$\therefore \{a_n - 2\}$는 초항이 -1, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열

$\therefore a_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$

$\therefore a_8 - a_7 = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + 2 - \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 2\right\}$

$= -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$

35. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염 물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다. 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염 물질이 있다. 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10% 씩 줄어들지만 매년 15톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 보고서에 의하면 지금으로부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염 물질의 양은? (단, $0.9^9 = 0.4$로 계산한다.)

① 150톤　② 165톤　③ 177톤
④ 186톤　⑤ 197톤

해설

n년 후 남아있는 오염물질의 양을 $\{a_n\}$
이라하면
$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$
a_1은 1년 후 오염물질의 양이므로
$a_1 = 250 \times 0.9 + 15 = 240$
$(a_{n+1} - \alpha) = 0.9(a_n - \alpha)$
$a_{n+1} = 0.9a_n + 0.1\alpha$
$0.1\alpha = 15 \quad \alpha = 150$
$\therefore a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$
$a_n - 150 = (a_1 - 150) \times 0.9^{n-1}$
$a_n = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$
$a_{10} = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$
$90 \times 0.4 + 150 = 186$

36. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A에서 B로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F는 $\mathrm{F} = 10\log\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)$ (데시벨)로 정의한다. 전파감쇄비가 -7(데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}} = 2$로 계산한다.)

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$-7 = 10\log\frac{B}{A}$

$-\frac{7}{10} = \log\frac{B}{A}$

$\frac{B}{A} = 10^{-\frac{7}{10}} = 10^{-1} \times 10^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

37. 전체집합 $U = \left\{2x | x \le 10,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x|5 < x < 15\}$ 일 때, $A^c \cap B^c \ne \varnothing, n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5개

해설

$U = \{2x|x \le 10$, x 는 자연수$\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
,
$A = \{x|5 < x < 15\} = \{6, 8, 10, 12, 14\}$,
$A^c \cap B^c \ne \varnothing \to n(A \cup B) = U$ 이고, $n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 는 A 의 원소 중 4 개는 반드시 포함하고, 나머지 하나는 반드시 포함하지 않으며 A^c 의 원소를 모두 포함하는 부분집합이다.

(1) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 12\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(2) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(3) A 의 원소 중 $\{6, 8, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(4) A 의 원소 중 $\{6, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

(5) A 의 원소 중 $\{8, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 $2, 4, 16, 18, 20$ 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

따라서 집합 B 의 개수는 $1 \times 5 = 5$ (개)

38. 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 물탱크를 만들려고 한다. 물탱크를 만드는 데 드는 비용은 밑면이 8000 원/ m^2 이고 옆면은 4000 원/ m^2 이다. 밑면의 가로의 길이가 $4\,\mathrm{m}$, 부피가 $36\,\mathrm{m}^3$ 인 물탱크를 만들 때, 가장 적은 비용으로 물탱크를 만든다면 그 비용은 얼마인가?

① 240000 원 ② 248000 원 ③ 256000 원
④ 264000 원 ⑤ 272000 원

해설

그림에서 물 탱크의 옆넓이는
$(8+2x)y(\mathrm{m}^2)$ 이므로
그 비용은 $(8+2x)y\cdot 4000$(원) 이고,
밑넓이는 $4x(\mathrm{m}^2)$ 이므로
그 비용은 $4x\cdot 8000$(원) 이다.
한편, 부피가 $36\,\mathrm{m}^3$ 이므로 $4xy=36$
$\therefore\ xy=9$
따라서, 총비용 p 는
$p=4000(8y+2xy+8x)=8000(4x+4y+9)$
$\geq 8000(2\sqrt{4x\cdot 4y}+9)=8000(2\cdot 12+9)$
$=264000$(원)
따라서, $x=3$ 일 때,
p 의 최소값은 264000(원)

39. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x)=f(x-2)$ 이므로

$g(x)=\begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x<2) \end{cases}$

$g^{-1}(9)=k$ 라 하면 $g(k)=9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2=9$ 에서 $k=5$

$k<2$ 일 때, $k-2=9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore\ g^{-1}(9)=5$

40. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$ 일 때, $\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ 의 값은?

① $-1+\sqrt{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\sqrt{2}$
④ 1 ⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$ 의 양변을 제곱하면

$x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 4$

$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\cdots}}}} = 2$ 이므로

$x+2=4$

$\therefore\ x=2$

$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{\ddots}}}} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}$ 의 값을 a 라 하면

$\frac{1}{2+a} = a,\ a(2+a)=1\ ,\ a^2+2a-1=0$

$\therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$

$0<a<1$ 이므로 $a=-1+\sqrt{2}$