

1. 다음 중 $A \subset B$ 인 관계인 것은?

① $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\}, B = \{3, 5, 7, 9\}$

③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}, B = \{1, 2, 4\}$

④ $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$

⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

해설

① $A \subset B$

② $B \subset A$

③ $B \subset A$

④ $B \subset A$

⑤ 포함 관계가 없다.

2. 두 집합 $A = \{0, 5, 6\}$, $B = \{x - 2, x + 4, 5\}$ 에 대하여 $A = B$ 일 때, x 의 값으로 옳은 것은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$A = B \text{ 이므로 } x - 2 = 0, x + 4 = 6$$

$$\therefore x = 2$$

3. $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개

② 4 개

③ 8 개

④ 16 개

⑤ 32 개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 8\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$ 이다.

4. $(3 - \sqrt{2})^{-1} \times (11 + 6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}} = a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{3 - \sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{11 + 2\sqrt{18}}} \\ &= \frac{1}{(3 - \sqrt{2}) \times (3 + \sqrt{2})} = \frac{1}{7} \\ \therefore \frac{1}{a} &= 7 \end{aligned}$$

5. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 13 \text{보다 크고 } 27 \text{보다 작은 자연수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소 14, 22는 반드시 포함하고, 홀수는 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 32 개

해설

$A = \{14, 15, 16, \dots, 26\}$ 의 부분집합 중 원소 14, 22는 반드시 포함하고, 홀수 15, 17, 19, 21, 23, 25는 포함하지 않는 부분집합의 개수는

$$2^{13-2-6} = 2^5 = 32 \text{ (개)}$$

6. 두 집합

$A = \{x \mid x \text{는 'mathematics' 에 쓰인 자음}\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 'science' 에 쓰인 자음}\}$

에 대하여 다음 보기의 알파벳 중 $A \cup B$ 의 원소가 아닌 것을 모두 골라라.

보기

$a, c, g, h, i, k, m, n, o, q, s, t$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : a

▷ 정답 : g

▷ 정답 : i

▷ 정답 : k

▷ 정답 : o

▷ 정답 : q

해설

$A = \{x \mid x \text{는 'mathematics' 에 쓰인 자음}\} = \{m, t, h, c, s\}$,

$B = \{x \mid x \text{는 'science' 에 쓰인 자음}\} = \{s, c, n\}$ 이다.

따라서 $A \cup B = \{m, t, h, c, s, n\}$

7. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 집합 $\{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B^c$ 과 항상 같은 집합은 ?

① $\emptyset$

② A

③ $A - B$

④ $A \cap B$

⑤ B^c

해설

분배법칙을 이용하여 펼쳐져 있는 부분을 다시 묶은 후 $A \cap B^c = A - B$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}\{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B^c &= \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B^c = (A \cap U) \cap B^c \\ &= A \cap B^c = A - B\end{aligned}$$

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $(A \cap B)^c = A^c \cap B^c$

② $A - B = A \cup B^c$

③ $A \cap (A \cap B)^c = B - A$

④ $(A - B)^c - B = A \cup B$

⑤ $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$

해설

① $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

② $A - B = A \cap B^c$

③ $A \cap (A \cap B)^c = A \cap (A^c \cup B^c)$
 $= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$
 $= \emptyset \cup (A - B) = A - B$

④ $(A - B)^c - B = (A \cap B^c)^c \cap B^c$
 $= (A^c \cup B) \cap B^c$
 $= (A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$
 $= (A \cup B)^c \cup \emptyset$
 $= (A \cup B)^c$

9. 함수 $f(x) = a|x| + (1-a)x$ 가 실수의 범위에서 일대일대응이 되도록 하는 상수 a 의 범위는 무엇인가?

① $a < -2$

② $a > 2$

③ $a < \frac{1}{2}$

④ $a > -\frac{1}{2}$

⑤ $a < 2$

해설

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ (1-2a)x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고}$$

$x \geq 0$ 일 때 $f(x)$ 는 증가함수이므로

$x < 0$ 일 때도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 일대일대응이 된다. 따라서 $1 - 2a > 0$

$$\therefore a < \frac{1}{2}$$

10. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3$, $(f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1 \quad (\because f(2) = 3)$$

함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.

$$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

11. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{5}\right) = x+2$ 를 만족할 때, $f(x)$ 를 x 의 식으로 나타내고 이를 이용하여 $f(f(10))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 256

해설

$$\frac{x+1}{5} = t \text{로 놓으면 } x = 5t - 1$$

$$f(t) = (5t - 1) + 2 = 5t + 1 \text{에서}$$

$$f(x) = 5x + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(f(x)) &= f(5x + 1) = 5(5x + 1) + 1 \\ &= 25x + 6\end{aligned}$$

$$\therefore f(f(10)) = 25 \cdot 10 + 6 = 256$$

12. 함수 $y = (x-2)^2 - 1 (x \leq 2)$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \sqrt{x-1} + 2 (x \geq 1)$

② $y = \sqrt{x+1} + 2 (x \geq -1)$

③ $y = -\sqrt{x+1} + 2 (x \geq -1)$

④ $y = -\sqrt{x+1} - 2 (x \geq -1)$

⑤ $y = -\sqrt{x-1} + 2 (x \geq 1)$

해설

$$y = (x-2)^2 - 1 \quad (x \leq 2, y \geq -1)$$

$$\text{역함수 } x = (y-2)^2 - 1 \quad (y \leq 2, x \geq -1)$$

$$x+1 = (y-2)^2$$

$$y = 2 \pm \sqrt{x+1}$$

$$y \leq 2 \text{ 이므로, } y = -\sqrt{x+1} + 2$$

$$\therefore y = -\sqrt{x+1} + 2 \quad (x \geq -1)$$

13. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a) + f(b) = f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다.
 $f(2) = \alpha, f(3) = \beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha + \beta)$ 의 값을
구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a) + f(b) = f(ab)$ 에 $a = 2, b = 3$ 을 대입하면

$$f(2) + f(3) = f(6)$$

$$\therefore f(6) = \alpha + \beta$$

$$\therefore f^{-1}(\alpha + \beta) = 6$$

$$\therefore g(\alpha + \beta) = 6$$

14. $-4 \leq x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2개

② 4개

③ 6개

④ 8개

⑤ 10개

해설

i) $-4 \leq x < -2$ 일 때,

$$-2 \leq \frac{x}{2} < -1 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -2$$

ii) $-2 \leq x < 0$ 일 때,

$$-1 \leq \frac{x}{2} < 0 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = -1$$

iii) $0 \leq x < 2$ 일 때,

$$0 \leq \frac{x}{2} < 1 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 0$$

iv) $2 \leq x < 4$ 일 때,

$$1 \leq \frac{x}{2} < 2 \text{ 이므로 } y = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = 1$$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4개이다.

15. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-3)^2} \\ &= |a+1| + |a-3| = (a+1) - (a-3) = 4\end{aligned}$$

16. $\sqrt{6 - \sqrt{20}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $a + \frac{3}{b}$ 이 값은?

① $3 + \sqrt{5}$

② $3 + \sqrt{6}$

③ $\frac{5}{4}(\sqrt{5} - 1)$

④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5} + 1)$

⑤ $7 + 3\sqrt{5}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{6 - \sqrt{20}} &= \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} \\ &= \sqrt{5} - 1 = 1. \dots\end{aligned}$$

정수부분 : 1 소수부분 : $\sqrt{5} - 2$

$$\therefore a + \frac{3}{b} = 1 + \frac{3}{\sqrt{5} - 2} = 1 + 3(\sqrt{5} + 2) = 7 + 3\sqrt{5}$$

17. $x = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$ 일 때, $x^2 + xy + y^2$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$x = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$x + y = 2\sqrt{3}, \quad xy = 1$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy = 12 - 1 = 11$$

18. $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 일 때, $x^2 - x - 2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \text{ 에서 } 2x = \sqrt{5}+1$$

$2x - 1 = \sqrt{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$4x^2 - 4x + 1 = 5 \quad \therefore x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x^2 - x - 2 = x^2 - x - 1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

19. 4와 102사이에 5개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102사이에 넣을 5개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 265

해설

항의 개수가 7개 이므로 7개 항의 합을 S_7 , 구하는 수의 합을 S 라 하면

$$S = S_7 - (4 + 102) = \frac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$$

20. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div \text{므로 } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

21. 세 수 a , 8 , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루고 $a + b = 17$ 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 161

해설

세 수 a , 8 , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $ab = 8^2 = 64$

또, 조건에서 $a + b = 17$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 17^2 - 2 \cdot 64 = 161$$

22. 첫째항부터 제3항까지의 합이 28, 첫째항부터 제6항까지의 합이 252인 실수로 이루어진 등비수열의 제10항은?

① 2^7

② 2^8

③ 2^9

④ 2^{10}

⑤ 2^{11}

해설

첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하고, 이 등비수열의 일반항을 a_n , 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 28 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = 252 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉡을 변형하면

$$\frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 252,$$

$$\frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} \cdot (r^3 + 1) = 252$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$28(r^3 + 1) = 252, \quad r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r^3 = 8$$

r 는 실수이므로 $r = 2 \dots\dots \textcircled{㉢}$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 7a = 28 \quad \therefore a = 4$$

따라서 주어진 등비수열의 첫째항은 4, 공비는 2이다.

$$\therefore a_{10} = 4 \cdot 2^9 = 2^{11}$$

23. 수열 $1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \dots$ 의 제125 항은?

① $\frac{15}{16}$

② $\frac{7}{8}$

③ $\frac{13}{16}$

④ $\frac{3}{4}$

⑤ $\frac{11}{16}$

해설

이 수열을 다음과 변형해서 분모가 같은 것까지 묶으면 군수열이 만들어진다.

$$(1), \left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}\right), \dots$$

따라서 제 n 군까지의 항수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ 이고,}$$

$$\frac{15 \times 16}{2} = 120 \text{ 이므로}$$

제125 항은 제16 군의 5 번째 항이 된다.

제16 군은

$$\left(\frac{16}{16}, \frac{15}{16}, \frac{14}{16}, \frac{13}{16}, \frac{12}{16}, \frac{11}{16}, \dots, \frac{1}{16}\right) \text{ 이므로}$$

제125 항은 5 번째 항인 $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ 이다.

24. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

$$\cdot a_1 = 1, a_2 = 2$$

$$\cdot 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_n$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$$

$$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$

$\therefore p = 3, q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

25. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1^2 = 1, (\text{우변}) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 를 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + \boxed{\text{(가)}}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \boxed{\text{(가)}} = \frac{1}{6}k(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

따라서, $n = \boxed{\text{(나)}}$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위

의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 적은 것은?

① k, k^2

② $k, (k+1)^2$

③ $k+1, k$

④ $(k+1)^2, k$

⑤ $(k+1)^2, k+1$

해설

(ii) $n = k$ 일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

양변에 $n = \boxed{(k+1)^2}$ 를 더하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 + \boxed{(k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + \boxed{(k+1)^2} = \frac{1}{6}k(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

따라서, $n = \boxed{k+1}$ 일 때에도 주어진 등식은 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

26. $\log_2 x + \log_2 y = \frac{3}{2}$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여, $x + 2y$ 의 최솟값을 m 이라 하고 그때의 x, y 의 값을 각각 a, b 라 하자. 이때, $\frac{am}{b}$ 의 값은?

① $2^{\frac{5}{4}}$

② $2^{\frac{3}{2}}$

③ $2^{\frac{9}{4}}$

④ $2^{\frac{5}{2}}$

⑤ $2^{\frac{13}{4}}$

해설

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy = \frac{3}{2} \therefore xy = 2^{\frac{3}{2}}$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy} = 2\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{2^{\frac{5}{2}}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{4}} = 2^{\frac{9}{4}}$$

따라서 $x + 2y$ 의 최솟값은 $2^{\frac{9}{4}}$ 이다.

(단, 등호는 $x = 2^{\frac{5}{4}}, y = 2^{\frac{1}{4}}$ 일 때 성립한다.)

$$a = 2^{\frac{5}{4}}, b = 2^{\frac{1}{4}}, m = 2^{\frac{9}{4}}$$

$$\frac{am}{b} = 2^{(\frac{5}{4} + \frac{9}{4}) - \frac{1}{4}} = 2^{\frac{13}{4}}$$

27. $\log_2 x = 5.2$ 일 때, $\log \frac{1}{x}$ 의 소수 부분은 ? (단, $\log 2 = 0.30$)

① 0.32

② 0.36

③ 0.40

④ 0.44

⑤ 0.48

해설

$$\log_2 x = 5.2 \text{ 이므로 } \frac{\log x}{\log 2} = 5.2, \log x = 1.56$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x = -1.56 = -2 + 0.44$$

$$\therefore \log \frac{1}{x} \text{ 의 소수 부분은 } 0.44$$

28. $\log a$ 의 정수 부분이 2일 때, $A = \log a \sqrt{a}$ 의 값의 범위는?

① $\frac{3}{2} \leq A < 3$

② $\frac{3}{2} < A \leq 3$

③ $2\sqrt{2} \leq A < 3\sqrt{3}$

④ $3 \leq A < \frac{9}{2}$

⑤ $3 < A \leq \frac{9}{2}$

해설

$\log a$ 의 정수 부분이 2이므로 $2 \leq \log a < 3$

$$\log a \sqrt{a} = \log a^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log a$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \leq \frac{3}{2} \log a < \frac{3}{2} \times 3$$

$$\therefore 3 \leq A < \frac{9}{2}$$

29. 소리를 발생하는 음원의 음향 파워레벨(L)의 단위를 데시벨(dB)이라 하며 그 크기가 다음과 같다.

$$L = 10 \log \frac{W}{10^{-12}} \quad (\text{단 } W \text{ 는 음원의 음향파워이고 단위는 와트}/m^2)$$

음향 파워가 10^{-8} (와트/ m^2)인 음원의 음향파워레벨은 몇 데시벨인지 구하면?

① 8

② 12

③ 26

④ 40

⑤ 64

해설

주어진 식에 음향 파워가 10^{-8} (와트/ m^2)를 대입하면

$$\begin{aligned} L &= 10 \log \frac{10^{-8}}{10^{-12}} \\ &= 10 \log \frac{1}{10^{-4}} \\ &= 10 \times 4 = 40dB \end{aligned}$$

30. 연이율 5%의 복리로 이자를 계산하는 정기예금에 1000만 원을 20년 동안 예금하였을 때, 원리합계를 구하여라. (단, $\log 1.05 = 0.02$, $\log 2.51 = 0.40$ 으로 계산한다.)

① 2100만원

② 2110만원

③ 2130만원

④ 2150만원

⑤ 2170만원

해설

1000만 원을 20년 동안 연이율의 5%의 복리로 예금하였을 때의 원리합계는

$$1000(1 + 0.05)^{20} = 1000 \times 1.05^{20} (\text{만원})$$

1.05^{20} 에 상용로그를 취하면

$$\log 1.05^{20} = 20 \log 1.05 = 20 \times 0.02 = 0.4$$

이때, $\log 2.51 = 0.40$ 이므로 $1.05^{20} = 2.51$

따라서 구하는 원리합계는 $1000 \times 2.51 = 2150$ (만원)

31. 다음 보기의 밑줄 친 것 중에서 기준이 명확한 것은 몇 개인가?

보기

- ㉠ 우리 반에서는 100m를 잘하는 학생들을 뽑아 방과 후에 1시간씩 달리기 연습을 한다.
- ㉡ 우리 반에서 인기가 좋은 학생을 반장 후보로 세울 것이다.
- ㉢ 운동을 잘하는 학생은 집중력이 좋다.
- ㉣ 평균이 85점 이상인 학생은 우등생이다.
- ㉤ 월드컵 성적이 비교적 좋은 나라들의 모임
- ㉥ 영토가 아름다운 국가의 모임
- ㉦ 10에 가장 가까운 자연수의 모임

① 1개

② 2개

③ 3개

④ 4개

⑤ 5개

해설

- ㉠ ‘잘하는’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉡ ‘좋은’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉢ ‘운동을 잘하는’이라는 단어는 그 기준이 애매하므로 집합이 될 수 없다.
- ㉣ ‘평균이 85점 이상인’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉤ ‘비교적’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉥ ‘아름다운’은 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 될 수 없다.
- ㉦ 10에 ‘가장 가까운’이라는 기준이 명확하므로 집합이 될 수 있다.

32. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A = B = C$ 가 되지 않는 경우를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A \subset C$

㉡ $A = C$

㉢ $C \subset A$

㉣ $A = B$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉣

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $A = B = C$ 가 아니어도 항상 $A \subset C$ 이다.

㉣ $A = B \subset C$ 일 때, $C \subset B$ 인지 알 수 없으므로 $A = B = C$ 가 아니다.

33. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

34. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_8 - a_7$ 의 값은?

① $\frac{1}{32}$

② $\frac{1}{64}$

③ $\frac{1}{128}$

④ $\frac{1}{256}$

⑤ $\frac{1}{512}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$$

$$(a_{n+1} - \alpha) = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha + \alpha = 1 \quad \therefore \alpha = 2$$

$$a_1 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$\therefore \{a_n - 2\}$ 는 초항이 -1 , 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$$\therefore a_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$$

$$\therefore a_8 - a_7 = -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + 2 - \left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 2\right\}$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(-\frac{1}{2} + 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}$$

35. 한 환경보호단체에서는 호수 A의 오염 물질에 대해 다음과 같은 내용의 보고서를 작성하였다. 현재 호수 A에는 산업폐기물에 의한 250톤의 오염 물질이 있다. 이 오염물질들은 매년 광산화(햇빛에 의한 자연 정화)에 의하여 10%씩 줄어들지만 매년 15톤의 오염물질이 새로 쌓인다. 이 보고서에 의하면 지금으로부터 10년 후 이 호수에 남아 있는 오염 물질의 양은? (단, $0.9^9 = 0.4$ 로 계산한다.)

① 150톤

② 165톤

③ 177톤

④ 186톤

⑤ 197톤

해설

n 년 후 남아있는 오염물질의 양을 $\{a_n\}$ 이라하면

$$a_{n+1} = 0.9a_n + 15$$

a_1 은 1년 후 오염물질의 양이므로

$$a_1 = 250 \times 0.9 + 15 = 240$$

$$(a_{n+1} - \alpha) = 0.9(a_n - \alpha)$$

$$a_{n+1} = 0.9a_n + 0.1\alpha$$

$$0.1\alpha = 15 \quad \alpha = 150$$

$$\therefore a_{n+1} - 150 = 0.9(a_n - 150)$$

$$a_n - 150 = (a_1 - 150) \times 0.9^{n-1}$$

$$a_n = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$$

$$a_{10} = 90 \times 0.9^{n-1} + 150$$

$$90 \times 0.4 + 150 = 186$$

36. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A 에서 B 로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F 는 $F = 10 \log \left(\frac{B}{A} \right)$ (데시벨)로 정의한다. 전파감쇄비가 -7 (데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}} = 2$ 로 계산한다.)

① $\frac{1}{10}$

② $\frac{1}{5}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{1}{2}$

⑤ $\frac{7}{10}$

해설

$$-7 = 10 \log \frac{B}{A}$$

$$-\frac{7}{10} = \log \frac{B}{A}$$

$$\frac{B}{A} = 10^{-\frac{7}{10}} = 10^{-1} \times 10^{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times 2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

37. 전체집합 $U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{x | 5 < x < 15\}$ 일 때, $A^c \cap B^c \neq \emptyset, n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

개

▶ 정답 : 5개

해설

$U = \{2x | x \leq 10, x \text{는 자연수}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$
 ,

$A = \{x | 5 < x < 15\} = \{6, 8, 10, 12, 14\}$,

$A^c \cap B^c \neq \emptyset \rightarrow n(A \cup B) = U$ 이고, $n(A \cap B) = 4$ 를 만족하는 집합 B 는 A 의 원소 중 4 개는 반드시 포함하고, 나머지 하나는 반드시 포함하지 않으며 A^c 의 원소를 모두 포함하는 부분집합이다.

- (1) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 12\}$ 를 반드시 포함하고 14 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
- (2) A 의 원소 중 $\{6, 8, 10, 14\}$ 를 반드시 포함하고 12 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
- (3) A 의 원소 중 $\{6, 8, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 10 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
- (4) A 의 원소 중 $\{6, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 8 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)
- (5) A 의 원소 중 $\{8, 10, 12, 14\}$ 를 반드시 포함하고 6 는 반드시 포함하지 않으며, A^c 의 원소 2, 4, 16, 18, 20 도 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{10-4-1-5} = 1$ (개)

따라서 집합 B 의 개수는 $1 \times 5 = 5$ (개)

38. 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 물탱크를 만들려고 한다. 물탱크를 만드는 데 드는 비용은 밑면이 8000 원/m^2 이고 옆면은 4000 원/m^2 이다. 밑면의 가로 길이 4 m , 부피가 36 m^3 인 물탱크를 만들 때, 가장 적은 비용으로 물탱크를 만든다면 그 비용은 얼마인가?

① 240000 원

② 248000 원

③ 256000 원

④ 264000 원

⑤ 272000 원

해설

그림에서 물 탱크의 옆넓이는

$(8 + 2x)y \text{ (m}^2\text{)}$ 이므로

그 비용은 $(8 + 2x)y \cdot 4000 \text{ (원)}$ 이고,

밑넓이는 $4x \text{ (m}^2\text{)}$ 이므로

그 비용은 $4x \cdot 8000 \text{ (원)}$ 이다.

한편, 부피가 36 m^3 이므로 $4xy = 36$

$$\therefore xy = 9$$

따라서, 총비용 p 는

$$p = 4000(8y + 2xy + 8x) = 8000(4x + 4y + 9)$$

$$\geq 8000(2\sqrt{4x \cdot 4y} + 9) = 8000(2 \cdot 12 + 9)$$

$$= 264000 \text{ (원)}$$

따라서, $x = 3$ 일 때,

p 의 최소값은 264000 (원)

39. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $g(x) = f(x-2)$ 라할 때, $g^{-1}(9)$ 의 값은? (단, $g^{-1}(x)$ 는 $g(x)$ 의 역함수)

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(x) = f(x-2)$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & (x \geq 2) \\ x-2 & (x < 2) \end{cases}$$

$g^{-1}(9) = k$ 라 하면 $g(k) = 9$

$k \geq 2$ 일 때, $(k-2)^2 = 9$ 에서 $k = 5$

$k < 2$ 일 때, $k-2 = 9$ 를 만족하는 k 가 없다.

$\therefore g^{-1}(9) = 5$

40. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2$ 일 때, $\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}}$ 의 값

은?

① $-1 + \sqrt{2}$

② $\frac{1}{2}$

③ $\sqrt{2}$

④ 1

⑤ 2

해설

같은 모양의 식이 연속적으로 반복되어 있는데 양변을 제곱하면 똑같은 모양이 또 나타난다.

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 4$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} = 2 \text{이므로}$$

$$x + 2 = 4$$

$$\therefore x = 2$$

$$\frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{\ddots}}}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}} \text{의 값을 } a \text{라 하면}$$

$$\frac{1}{2 + a} = a, a(2 + a) = 1, a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\therefore a = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$0 < a < 1 \text{ 이므로 } a = -1 + \sqrt{2}$$