1. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$A(\sqrt{3}-1, 1-\sqrt{2})$, $B(\sqrt{3}, 1+\sqrt{2})$

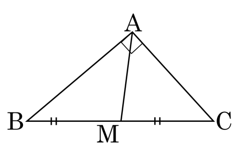
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{AB}$
$= \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$
$= \sqrt{1+8} = 3$

2. 다음은 $\angle A = 90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$을 증명한 것이다. 다음 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면



$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{(나)}^2\right)$

이 때, $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ 이고,

$\boxed{(나)} = \boxed{(다)}\overline{BC}$ 이므로

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{(가)}\left(\boxed{(라)}\overline{BC}^2\right)$
$= \overline{BC}^2$

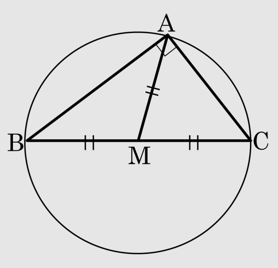
위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① 3, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
② 4, $2\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$
③ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$
④ 2, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$
⑤ $\frac{16}{5}$, $\overline{AM}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{16}$

해설

파푸스의 중선정리에 의해

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \boxed{2}\left(\overline{BM}^2 + \boxed{\overline{AM}}^2\right)$



이 때, $\triangle ABC$는 $\angle A = 90°$인 직각삼각형이므로 점 A는 점 M을 중심으로 하고, 변 BC를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

$\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ 이므로 $\boxed{\overline{AM}} = \frac{1}{2}$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4} + \frac{\overline{BC}^2}{4}\right) = \boxed{2}\left(\boxed{\frac{1}{2}}\overline{BC}^2\right) = \overline{BC}^2$$

3. 다음 수직선 위의 점들 중에서 선분 BG를 2 : 3 으로 내분하는 점은?

① C　② D　③ E　④ F　⑤ I

해설

선분 BG를 내분하는 점은 선분 BG위에 있다. 선분 BG의 길이는 $8-(-2)=10$ 이다. $2 : 3 = 4 : 6$ 이고, $4+6=10$ 이므로 점 B를 시점으로 하고 길이가 4인 선분은 BD이다. 따라서 선분 BG를 $2 : 3$ 으로 내분하는 점은 D이다.

4. 세 점 A(3, 4) , B(−2, − 2), C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(2,\ \frac{2}{3}\right)$일 때, 점 C의 좌표는?

① (5, 0) ② (−5, 1) ③ (5, 1)
④ (6, 0) ⑤ (−6, 1)

해설

C$(a,\ b)$라 하면

$$\left(2,\ \frac{2}{3}\right)=\left(\frac{3-2+a}{3},\ \frac{4-2+b}{3}\right)$$

$\therefore (a,\ b)=(5,\ 0)$

5. 네 점 $O(0,0), A(-3,0), B(4,0), C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC 의 넓이는 삼각형 BOC 의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로
$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

6. 두 직선 $y = ax + 2$, $y = 4x + b$ 의 그래프가 모두 점 $(1,\ -2)$ 를 지날 때, 기울기가 ab 이고 y 절편이 $a + b$ 인 직선의 방정식을 구하면?

① $y = -24x + 10$ ② $y = 24x - 10$ ③ $y = 24x + 10$
④ $y = 12x - 10$ ⑤ $y = 12x + 10$

해설
$y = ax + 2$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = a + 2$
$\therefore a = -4$
$y = 4x + b$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $-2 = 4 + b$
$\therefore b = -6$
$\therefore ab = 24$, $a + b = -10$
$\therefore$ 구하는 직선의 방정식 : $y = 24x - 10$

7. 세 점 $(3, 1)$, $(-2+a, 4)$, $(7, a)$가 한 직선 위에 있도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

세 점 $\mathrm{A}(3, 1)$, $\mathrm{B}(-2+a, 4)$, $\mathrm{C}(7, a)$가
동일 직선 위에 있으려면
(직선 AB 의 기울기)= (직선 BC 의 기울기) 이므로

$$\frac{4-1}{-2+a-3} = \frac{a-4}{7-(-2+a)}$$

$$\frac{3}{a-5} = \frac{a-4}{9-a}$$

$$27-3a = a^2-9a+20$$

$$a^2-6a-7 = (a+1)(a-7) = 0$$

$\therefore\ a = -1$ 또는 $a = 7$

따라서 양수 a 의 값은 7

8. 두 직선 $(a-2)x+3y-1=0$, $ax-y+3=0$이 평행할 때의 a값이 $\frac{1}{n}$이다. n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ 에서

$\frac{a-2}{a}=\frac{3}{-1}\neq\frac{-1}{3}$ $(a\neq 0)$

$\therefore\ 3a=-a+2$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ n=2$

9. 점 $(4, 5)$ 와 직선 $3x - 4y - 2 = 0$ 사이의 거리를 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

거리 $d = \dfrac{|3 \cdot 4 - 4 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$

$= \dfrac{10}{5} = 2$

10. 평행한 두 직선 $3x - 5y + 2 = 0$, $3x - 5y - 1 = 0$ 사이의 거리는?

① $\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$ ② $\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$ ③ $\dfrac{\sqrt{34}}{34}$
④ $\dfrac{2\sqrt{34}}{34}$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{34}}{34}$

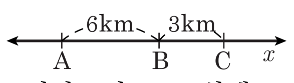
해설

$3x - 5y + 2 = 0$ 위의 점 $\left(0,\ \dfrac{2}{5}\right)$에서

$3x - 5y - 1 = 0$ 까지의 거리

$$\frac{\left|3 \cdot 0 - 5 \cdot \dfrac{2}{5} - 1\right|}{\sqrt{9 + 25}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34}$$

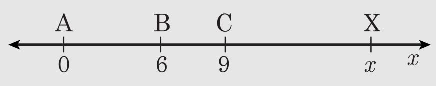
11. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?



① 6 km ② 9 km ③ 12 km
④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
$|x-0| = 2|x-9|$
곧, $|x| = 2|x-9|$
$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$
$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

12. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}$$
$$= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$$
$$\therefore\ a^2+b^2=5$$

13. 두 점 A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① P(2.4, −1), Q(0, 6)　　② P(3.6, 0), Q(−1, 6)

③ P(3.6, 0), Q(0, 6)　　④ P(2.4, 0), Q(0, 5)

⑤ P(3.6, 0), Q(−1, 2)

해설

A(−1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x, 0) 과 Q(0, y)를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore$ P(3.6, 0)

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6\ \therefore$ Q(0, 6)

14. 일차함수 $y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고, y 절편이 5 일 때, $a+b$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 상수)

① 0 ② 3 ③ 6 ④ −6 ⑤ −3

해설

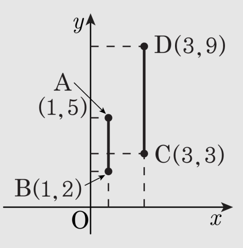
$y = (a-2)x + b + 2$ 의 그래프가
x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가
$45°$ 이므로
$a - 2 = \tan 45° = 1$ 에서 $a = 3$
또, y 절편이 5 이므로
$b + 2 = 5$ 에서 $b = 3$
$\therefore\ a + b = 6$

15. $f(x) = ax + b$ 이고 $2 \leq f(1) \leq 5$, $3 \leq f(3) \leq 9$ 라고 할 때, a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

해설

다음 그림과 같이 $f(x) = ax + b$ 가 선분 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 를 동시에 지나야 하고
a는 $y = f(x)$ 의 기울기이므로



a의 최댓값은 $\overline{BD}$ 의 기울기이고
a의 최솟값은 $\overline{AC}$ 의 기울기이다.

$\overline{BD}$의 기울기$= \dfrac{9-2}{3-1} = \dfrac{7}{2}$

$\overline{AC}$의 기울기$= \dfrac{3-5}{3-1} = -1$

$\therefore$ 최댓값+최솟값$= \dfrac{7}{2} - 1 = \dfrac{5}{2}$

(다른 풀이) $f(1) = a + b$, $f(3) = 3a + b$ 이므로

$\therefore \ -1 \leq a \leq \dfrac{7}{2}$

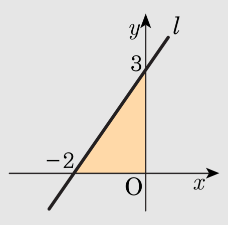
16. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

17. 세 점 A(1, 4), B(−1, 2), C(4, a)가 일직선위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

세 점이 일직선 위에 있으면 기울기가 일치한다.

$$\frac{2-4}{-1-1} = \frac{a-2}{4-(-1)}$$

$\Rightarrow \quad \therefore\ a = 7$

18. 세 점 A(2, 3), B(−1, 9), C(−4, a) 가 일직선 위에 있을 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① 6　② 9　③ 12　④ 15　⑤ 17

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기가 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기 : $\dfrac{3-9}{2-(-1)} = -2$

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 기울기 : $\dfrac{a-3}{(-4)-(2)}$ $\therefore\ a = 15$

19. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

20. 직선 $y = mx + n(m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$	㉡ $p + qm = 0$	㉢ $ap + bq = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots$ ①

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ②

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots$ ③

Ⅰ) ① // ② : $m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

Ⅱ) ①⊥③ : $m\left(-\frac{p}{q}\right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

21. 세 직선 $x+2y=5$, $2x-3y=4$, $ax+y=0$이 삼각형을 이루지 못할 때, 상수 a의 값들의 곱은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{3}{23}$ ③ $-\frac{1}{23}$ ④ $\frac{2}{23}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

주어진 세 직선이 일치하는 경우는 없으므로
삼각형을 이루지 못하는 것은 두 직선이
서로 평행해서 교점이 두 개만 생기거나
세 직선이 모두 한 점에서 만나는 경우이다.

(i) 두 직선이 평행한 경우 세 직선의 기울기는
각각 $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $-a$이므로
$a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$이면 두 직선이 평행하다.

(ii) 세 직선이 한 점에서 만나는 경우
$x+2y=5$ 와 $2x-3y=4$의 교점은 $\left(\frac{23}{7}, \frac{6}{7}\right)$
이 점이 $ax+y=0$ 위에 있으려면 $a=-\frac{6}{23}$

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{6}{23}$
따라서 세 수의 곱은 $\frac{2}{23}$

22. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4$, $y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore \ 2a+b=0$

23. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$
④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots$ ㉠
$3x+2y-12=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times 2-$ ㉡ : $x=2,\ y=3$
$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$
구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$
$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x\right.$ 와 평행하다.$\Big)$
$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고
$(2,\ 3)$ 을 지나므로
$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$
$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

24. 함수 $f(x) = ax + 1$ 이 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구하면?

① $(1, 0)$　　② $(1, 1)$　　③ $(0, 1)$
④ $(-1, 0)$　　⑤ $(0, -1)$

해설

함수 $f(x) = ax + 1$ 의 그래프는
a 의 값에 관계없이 점$(0,\ 1)$ 을 지나는 직선이다.

25. 원점에서의 거리가 1 이고, 점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선의 방정식이 $ax + by + c = 0$ 으로 표현될 때, $a + b + c$ 의 값을 구하면? (단, $b \neq 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

점 $(1, 2)$ 를 지나는 직선은
$y = m(x-1) + 2$ 에서,
$mx - y - m + 2 = 0 \cdots$ ㉠
여기서 $(0, 0)$ 에 이르는 거리가 1 이므로
$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}} = 1,\ |m-2| = \sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면, $m = \frac{3}{4}$
㉠에 대입하여 정리하면, $\frac{3}{4}x - y + \frac{5}{4} = 0,$
$3x - 4y + 5 = 0$
$\therefore\ a + b + c = 3 - 4 + 5 = 4$

26. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

27. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0, 0),\ (2, 6),\ (6, 3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$

28. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이 되도록 하는 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$

$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$

$2a = 18$

$\therefore\ a = 9$

29. $\triangle$ABC에서 A$(6,\ 1)$, B$(-1,\ 2)$, C$(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P$(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 \iff (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 \iff (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}} = 5$

30. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ______ m

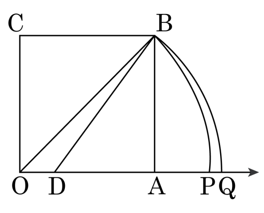
▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

31. 다음 그림과 같이 반직선 OA 와 한 변의 길이가 4 인 정사각형 OABC 가 있다. 점 O 를 중심으로 하고 선분 OB 를 반지름으로 하는 원이 반직선 OA 와 만나는 점을 P , 선분 OA 를 1 : 3 으로 내분하는 점 D 를 중심으로 하고 선분 DB 를 반지름으로 하는 원이 반직선 OA 와 만나는 점을 Q 라 하자. 이때, $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2$ 의 값은?



① 52 ② 56 ③ 60 ④ 64 ⑤ 68

해설

$\overline{OP} = \overline{OB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

$\overline{OD} = \frac{1}{4}\overline{OA} = 1,\ \overline{DA} = 3,\ \overline{DB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로,

$\overline{OQ} = \overline{OD} + \overline{DB} = 1 + 5 = 6$

$\therefore\ \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = 32 + 36 = 68$

32. 두 점 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$에 대하여 $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$를 만족하는 점 P의 자취의 방정식은?

① $-3x + 2y + 9 = 0$
② $3x + 2y = 0$
③ $6x - 4y + 9 = 0$
④ $-3x + 2y = 0$
⑤ $-6x + 4y - 5 = 0$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$라 하면
$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 5$에서
$(x-3)^2 + y^2 - \{x^2 + (y-2)^2\} = 5$
정리하면 $-6x + 4y = 0$
$\therefore -3x + 2y = 0$

33. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}^2}+\overline{\mathrm{BP}^2}$의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?

① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 $\mathrm{P}(3,4)$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\} \\ &\quad +\{(x-5)^2+(y-3)^2\} \\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60 \\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10 \\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3,\ y=4$일 때 최솟값을 갖는다.

34. 세 점 $A(4,\ -5)$, $B(-5,\ 2)$, $C(-8,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 의 값이 최소가 될 때, 점 P 의 좌표는?

① (-3, -3)　　② (-3, 0)　　③ (0, 0)

④ (3, 0)　　⑤ (3, 3)

해설

$P(x,\ y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(x-4)^2+(y+5)^2+(x+5)^2+(y-2)^2+(x+8)^2+(y-3)^2$

$=3(x+3)^2+3y^2+116$

따라서 $x=-3,\ y=0$일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$은 최소가 된다.

35. 어떤 시험 결과, 최저점은 25점, 최고점은 160점이었다. 이 점수를 환산식 $y = ax + b$에 의하여 최저점을 10점, 최고점을 100점으로 고치려고 한다. 처음의 100점은 나중의 몇 점으로 환산되겠는가?

① 30　② 40　③ 50　④ 60　⑤ 70

해설

$25a + b = 10$, $160a + b = 100$이므로 두 식을 연립한다.

$\Rightarrow \quad a = \frac{2}{3} \quad b = -\frac{20}{3}$

$\therefore$ 100점을 환산하면, $\frac{2}{3} \times 100 - \frac{20}{3} = 60$

36. 다음 중 직선의 방정식을 바르게 구한 것을 모두 고르면?

㉠ 점 $(0,5)$를 지나고, x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $60°$인 직선 $\rightarrow y = x + 5$ ㉡ 두 점 $\mathrm{A}(1,-1)$, $\mathrm{B}(-1,3)$을 지나는 직선 $\rightarrow y = -2x + 1$ ㉢ x 절편이 2 , y절편이 -2인 직선 $\rightarrow y = 2x - 2$

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ (기울기)$= \tan 60° = \sqrt{3}$ 이고 y절편이 5이므로 $y = \sqrt{3}x + 5$

㉡ $y + 1 = \dfrac{3-(-1)}{-1-1}(x-1)$, $\therefore\ y = -2x + 1$

㉢ $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} = 1$, $\therefore\ y = x - 2$

따라서 직선의 방정식을 바르게 구한 것은 ㉡뿐이다.

37. 두 점 A$(-2,\ -1)$, B$(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\frac{3-(-1)}{4-(-2)} = \frac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

즉, $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$

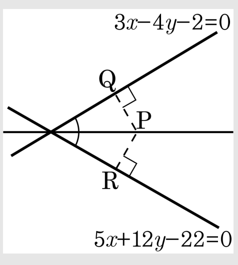
38. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

39. 두 직선 $3x+2y-1=0$ 과 $2x-3y+1=0$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들 중 x 와 y 의 좌표가 모두 정수인 점에 대한 다음 설명 중 옳은 것만을 골라 놓은 것은?

Ⅰ. 위 조건을 만족하는 점은 유한개이다.
Ⅱ. 제2사분면의 점들 중에서 위 조건을 만족하는 것이 없다.
Ⅲ. 제3사분면에 있는 모든 점들의 y좌표는 5의 배수이다.

① Ⅰ　② Ⅱ　③ Ⅲ　④ Ⅰ, Ⅲ　⑤ Ⅱ, Ⅲ

해설

두 직선에서 같은 거리에 있는 점을
P$(a,\ b)$ 라고 하면
$\frac{|3a+2b-1|}{\sqrt{13}} = \frac{|2a-3b+1|}{\sqrt{13}}$
$3a+2b-1 = 2a-3b+1$ 또는
$3a+2b-1 = -2a+3b-1$ 이므로
$a+5b-2=0,\ 5a-b=0$ 에서
$x+5y-2=0$, $5x-y=0$
즉, $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$ 와
$y=5x$ 위에 있는 모든 점들은
주어진 두 직선에서 이르는 거리가 같다.
Ⅰ. 이러한 좌표는 무한개 존재한다.
Ⅱ. $y=-\frac{1}{5}x+\frac{2}{5}$
위의 점, 예를 들면 $(-3,\ 1)$ 이 있다.
Ⅲ. $y=5x$ 로 x 가 정수일 때,
y 좌표는 5 의 배수이다.

40. 점 A$(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$　② $x+2y-8=0$　③ $x-2y+8=0$

④ $x+2y+8=0$　⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0\ \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면

$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$

$x=\frac{a+18}{1+3}$, $y=\frac{b+6}{1+3}$

$a=4x-18$, $b=4y-6$

㉠에 대입하면,

$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

41. 두 점 $A(-2,\ 1)$, $B(4,\ -3)$에서 같은 거리에 있고 직선 $y=2x-1$ 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ -7)$ ② $(-2,\ -5)$ ③ $(3,\ 5)$
④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서
$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-4)^2+(b+3)^2$
정리하면 $12a-8b=20$
$\therefore\ 3a-2b=5\cdots$ ①
또, P는 $y=2x-1$ 위에 있으므로
$b=2a-1\cdots$ ②
①, ② 를 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-7$

42. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$

$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$

$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서

$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$

$\therefore\ a = 2$

따라서 모든 a의 값의 합은

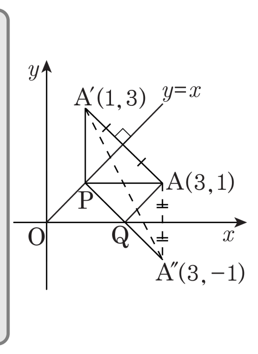
$3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$

43. 정점 $A(3, 1)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$의 최소 거리를 구하면?

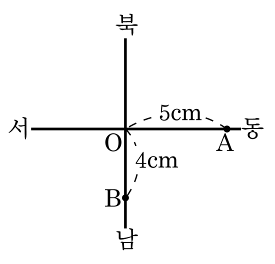
① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

점 A의 $y = x$에 대한 대칭점을 A′
점 A의 x축에 대한 A′라 하면
$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QA''} \geq \overline{A'A''}$
$\overline{A'A''} = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-3)^2} = 2\sqrt{5}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QA}$의 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.



44. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후　② 1.5시간 후　③ 1.6시간 후
④ 1.7시간 후　⑤ 1.8시간 후

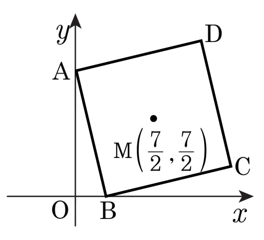
해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 A(5, 0), B(0, -4) 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 A$(5-4t,\ 0)$, B$(0,\ -4+2t)$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는$s = \sqrt{\{0-(5-4t)\}^2 + (-4+2t-0)^2}$

$= \sqrt{20t^2 - 56t + 41} = \sqrt{20\left(t - \frac{14}{10}\right)^2 + \frac{9}{5}}$

s 는 $t = \frac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

45. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$일 때, $\triangle$OAB의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

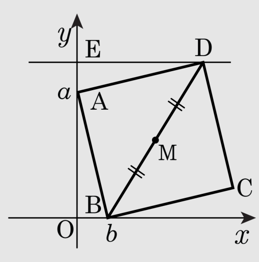


① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 A$(0, a)$, B$(b, 0)$이라 하고 점 D를 지나면서
x축에 평행한 직선이 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle\mathrm{OAB} \equiv \triangle\mathrm{EDA}$
따라서 $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BO}} = b, \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{AO}} = a$
이므로 D$(a, a+b)$
이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로
M$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$
즉, $\frac{a+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $a+b=7$
또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로
$\triangle$OAB에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\sqrt{a^2+b^2} = 5, a^2+b^2 = 25$

$$\therefore \triangle\mathrm{OAB} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\left\{(a+b)^2 - \left(a^2+b^2\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}\left(7^2 - 25\right) = 6$$



46. $\triangle$ABC 의 세변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$\left(\dfrac{a_1+a_2}{2},\ \dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_2+a_3}{2},\ \dfrac{b_2+b_3}{2}\right)$,

$\left(\dfrac{a_3+a_1}{2},\ \dfrac{b_3+b_1}{2}\right)$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$\left(\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \dfrac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$ 로

$\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$G=\left(\dfrac{-2-6+5}{3},\ \dfrac{7+4-2}{3}\right)=(-1,\ 3)$

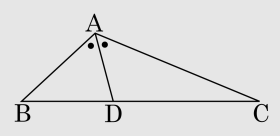
$\therefore\ 2$

47. 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(-1,\ \sqrt{3})$, $C(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

① $1:2$　② $1:3$　③ $1:4$　④ $2:3$　⑤ $2:5$

해설

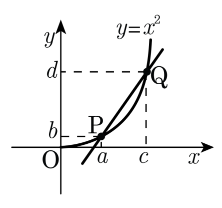
점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로



$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2:5$

$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2:5$

48. 함수 $y = x^2$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{\sqrt{b}+\sqrt{d}}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ의 기울기는?(단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{5}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$, $\mathrm{Q}(c,d)$ 는 $y = x^2$ 의 그래프 위의 점이므로 $b = a^2,\ d = c^2$

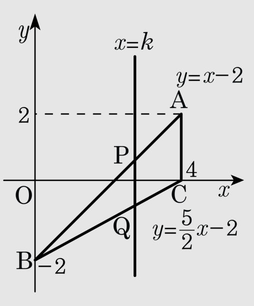
즉, $a = \sqrt{b},\ c = \sqrt{d}\ (\because\ 0 < a < c)$

$$(\overline{\mathrm{PQ}} \text{ 의 기울기}) = \frac{d-b}{c-a} = \frac{c^2-a^2}{c-a} = \frac{(c-a)(c+a)}{c-a} = c + a = \sqrt{d} + \sqrt{b} = 2$$

49. 세 점 A $(4,\ 2)$, B $(0,\ -2)$, C $(4,\ 0)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x=k$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　② $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x=k$와 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P $(k,\ k-2)$, Q $\left(k,\ \dfrac{1}{2}k-2\right)$이다.

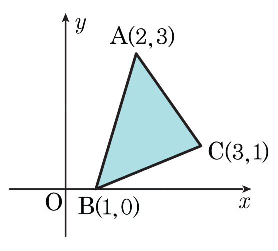
삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left\{(k-2)-\left(\dfrac{1}{2}k-2\right)\right\}\times k=2,\ k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}\ (\because\ 0<k<4)$

50. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

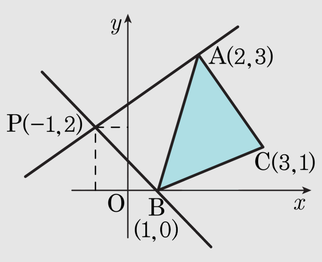


① $-1 \le m \le 3$　② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$　④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$

⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$