1. $x > 0, y > 0$ 일 때, $\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right)$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$\left(3x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{6}{x}\right) = 20 + 3\left(xy + \frac{4}{xy}\right)$

산술기하조건을 사용하면

$xy + \frac{4}{xy} \geq 2\sqrt{xy \times \left(\frac{4}{xy}\right)} = 4$

$\therefore$ 최솟값 : $20 + 3 \times 4 = 32$

2. 함수 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{5}{6}$　③ 1　④ 2　⑤ 6

해설

$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$
$=2ax+4\ \cdots㉠$
$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$
$=2ax+6a-1\ \cdots㉡$
㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$
$4=6a-1$
$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

3. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$일 때, 합성함수 $g \circ f$의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 2)$
$= 2(x + 2) - 3 = 2x + 1$

합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y = 2x + 1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ 이 된다.
따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$이다.

4. $a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}\times\frac{a}{c}}=3$

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geq 3$

5. 길이가 16 m 인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① $8\,\mathrm{m}^2$ ② $16\,\mathrm{m}^2$ ③ $25\,\mathrm{m}^2$ ④ $36\,\mathrm{m}^2$ ⑤ $64\,\mathrm{m}^2$

해설

가로를 x, 세로를 y라 하자.
$2(x+y)=16 \quad x+y=8$
산술기하평균을 사용하면,
$x+y \geq 2\sqrt{xy}$
$4 \geq \sqrt{xy}$
$\Rightarrow \quad 16 \geq xy$
$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\mathrm{m}^2)$

6. $a,\ b,\ c$가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=2$일 때, $a+\sqrt{2}b+c$의 값을 P라 하면, P의 범위를 구하면?

① $-\sqrt{2} \le P \le \sqrt{2}$
② $-2\sqrt{2} \le P \le 2\sqrt{2}$
③ $-\sqrt{3} \le P \le \sqrt{3}$
④ $-2\sqrt{3} \le P \le 2\sqrt{3}$
⑤ $-3\sqrt{3} \le P \le 3\sqrt{3}$

해설

$a,\ b,\ c$가 실수이고 $a^2+b^2+c^2=2$일 때
코시-슈바르쯔 부등식을 이용하여
$(1^2+\sqrt{2}^2+1)(a^2+b^2+c^2) \ge (a+\sqrt{2}b+c)^2$
$4 \cdot 2 \ge (a+\sqrt{2}b+c)^2$
$\therefore\ -2\sqrt{2} \le a+\sqrt{2}b+c \le 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow\ -2\sqrt{2} \le P \le 2\sqrt{2}$

7. 두 실수 x, y의 제곱의 합이 10일 때, $x+3y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 20

해설

코시-슈바르츠 부등식에 의해

$(1^2+3^2)(x^2+y^2) \geq (x+3y)^2$

$x^2+y^2=10$이므로 $100 \geq (x+3y)^2$

$\therefore\ -10 \leq x+3y \leq 10$

$\therefore\ M=10,\ m=-10$

$\therefore\ M-m=10-(-10)=20$

8. $f\left(\frac{2x}{-x+2}\right)=x^2-3x$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f\left(\frac{2x}{-x+2}\right)=x^2-3x$ 일 때

$\frac{2x}{-x+2}=2$ 에서 $2x=2(-x+2)$, $2x=-2x+4$

$\therefore\ x=1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$f\left(\frac{2}{-1+2}\right)=1-3$

$\therefore\ f(2)=-2$

9. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{x-3}{x+3}$ 를 만족할 때, $f(-3) = \dfrac{a}{b}$ 이다. 이 때, $a+b$의 값은? (단, $a<b$, a와 b는 서로소인 정수)

① -2 ② 2 ③ 6 ④ 12 ⑤ 15

해설

$f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{x-3}{x+3}$ 에서

$\dfrac{x-1}{x+1} = -3$ 이라고 하면 $x-1 = -3(x+1)$

$4x = -2 \quad \therefore \ x = -\dfrac{1}{2}$

$f(-3) = \dfrac{-\frac{1}{2}-3}{-\frac{1}{2}+3} = -\dfrac{7}{5}$

$a = -7,\ b = 5 \quad \therefore \ a+b = -2$

10. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5　② 3　③ 1　④ −3　⑤ −5

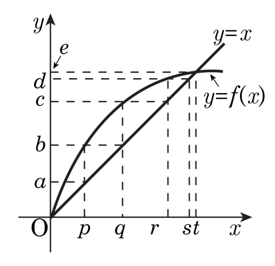
해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
$= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax + 3a + b = -4x - 5,$
$2a = -4,\ 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
$h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

11. 림은 $y=f(x)$ 와 $y=x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f\circ f)(x)=d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f\circ f)(x)=f(f(x))=d\cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r)=d$ 이므로

㉠에서 $f(x)=r$

$\therefore r=c$ 에서 $f(x)=r=c$

$\therefore x=q$

12. 함수 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + ax + 3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f \circ g$는 g와 f의 합성함수이다.)

① $a \leq -3, a \geq 2$　② $-1 \leq a \leq 1$　③ $a \leq -2, a > 3$

④ $-2 \leq a \leq 2$　⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$g(x) = t$라 두면,
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = t^2 - t - 2 \geq 0$에서
$t \leq -1, t \geq 2$에서
(i) $t \leq -1$
$x^2 + ax + 3 \leq -1$
$x^2 + ax + 4 \leq 0$ (부적절)
(ii) $t \geq 2$
$x^2 + ax + 3 \geq 2$
$x^2 + ax + 1 \geq 0$에서
$D = a^2 - 4 \leq 0$
$\therefore\ -2 \leq a \leq 2$

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = |x-2| + ax - 6$ 이 역함수를 가질 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$　　② $-1 < a < 0$

③ $0 < a < 1$　　④ $a > 1$

⑤ $a < -1$ 또는 $a > 1$

해설

$f(x) = |x-2| + ax - 6$

$$= \begin{cases} (a+1)x - 8 & (x \geq 2) \\ (a-1)x - 4 & (x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 연속함수이므로 역함수가 존재하기 위해서는 $f(x)$ 가 증가함수이거나 감소함수이어야 한다.

따라서, 기울기 $a+1$ 와 $a-1$ 은 모두 양이거나 모두 음이어야 한다.

즉, $(a+1)(a-1) > 0$

$\therefore\ a < -1$ 또는 $a > 1$

14. 실수 전체집합에서 정의된 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 2x-1$, $(h \circ (g \circ f))(x) = -2x + b$ 가 성립하고, $f(x) = ax + 1$ 일 때, 두 상수 a, b의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ 이므로
$(h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(ax+1) = 2(ax+1) - 1 = 2ax + 1$
$2ax + 1 = -2x + b$ 에서 $a = -1, b = 1$
$\therefore a + b = 0$

15. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \left(g^{-1} \circ f \circ g\right)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

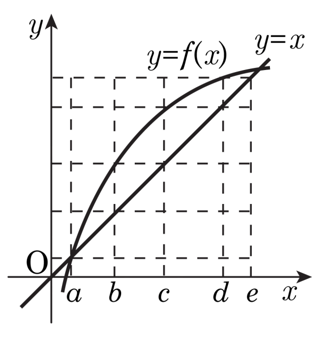
$h = g^{-1} \circ f \circ g$ 에서

$$\begin{aligned} h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x)) \end{aligned}$$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x$ 이므로 $(h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$

16. 함수 $y = f(x)$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, $y = f(x)$ 의 그래프를 이용하여 $g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$ 의 값을 구하면?



① a　　② c

③ $a + b - c$　　④ $a + c - e$

⑤ $a + b + c - d - e$

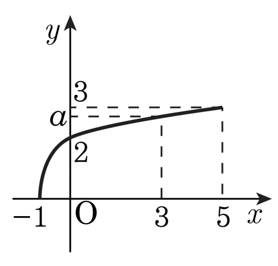
해설

$f(d) = e, f(c) = d, f(b) = c, f(a) = a$

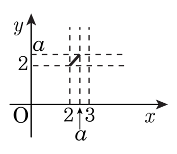
$\Rightarrow g(a) + f(b) + f(c) - g(d) - g(e)$

$\therefore\ a + c + d - c - d = a$

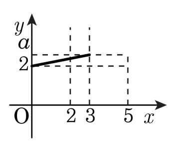
17. 실수 $-1 \le x \le 5$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$의 그래프는?



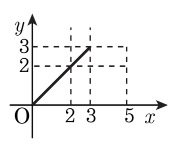
①



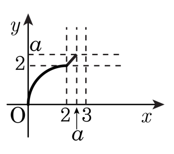
②



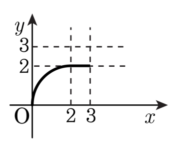
③



④



⑤



해설

실수 $-1 \le x \le 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$이므로 $(f \circ f)\ (x)$ 함수는 $f(f(x))$에서 $f(x)$의 치역을 정의역으로 하는 함수이다.
따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는
$y = f(x)\ (0 \le x \le 3\ )$가 되고 치역은 $2 \le y \le a$ 이다.

18. 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f^{-1}(3) = 2$ 이고 $f(3x-4) = g(x)$ 라 할 때, $g^{-1}(3)$ 의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$g^{-1}(3) = k$ 라 하면 $g(k) = 3$
$\therefore f(3k-4) = g(k) = 3$
$f^{-1}(3) = 3k - 4 = 2$ 이므로 $k = 2$
$\therefore g^{-1}(3) = 2$

19. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $\left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(f \circ g)^{-1}(3) = a$ 로 놓으면 $(f \circ g)(a) = 3$
$2a - 3 = 3$ 에서 $a = 3$
$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$
$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$
$h^{-1}(3) = b$ 놓으면 $h(b) = 3$
$2b + 1 = 3$
$\therefore b = 1$
$\therefore \left(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}\right)(3) = h^{-1}(3) = 1$

20. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1　② $-\sqrt{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$의 그래프의 교점과 같다.
$y = x^2 - 4x + 6$과 $y = x$를 연립하면
$x^2 - 5x + 6 = 0,\ (x-2)(x-3) = 0$
$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
$\therefore x = 2,\ y = 2$ 또는 $x = 3,\ y = 3$
즉, 두 교점은 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$이다.
따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

21. $a \ge 1,\ b \ge 1$이고 $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$일 때, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M \cdot m$ 의 값을 구하면?

① 1　　② $\frac{1}{2}$　　③ 2　　④ $\frac{1}{3}$　　⑤ 3

해설

$a > 0,\ b > 0$이므로

$\sqrt{a} + \sqrt{b} \ge 2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = 2^4\sqrt{ab}$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4$이므로 $2^4\sqrt{ab} \le 4$

$\therefore\ \sqrt[4]{ab} \le 2$

$\therefore\ \sqrt{ab} \le 4$

따라서, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}} \ge \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \cdots$①

($\because\ \sqrt{ab} \le 4$이므로 $\frac{1}{\sqrt{ab}} \ge \frac{1}{4}$)

한편, $a \ge 1,\ b \ge 1$이므로

$0 < \frac{1}{a} \le 1,\ 0 < \frac{1}{b} \le 1$

$\therefore 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le 2 \cdots$②

①, ②에서 $\frac{1}{2} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \le 2$

$\therefore\ M = 2,\ m = \frac{1}{2}$

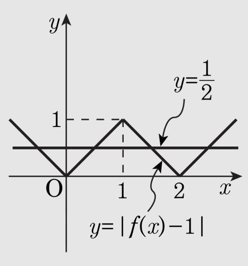
$\therefore\ M \cdot m = 1$

22. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x)-1|$ 이므로
$y = |f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x)-1|$ 의 그래프와
직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4 개이다.

23. 함수 $y = f(x)$ 에서 $f^{(2)} = f \circ f$, $f^{(3)} = f \circ f^{(2)}$, $\cdots$, $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$ 라 정의한다. $f(x) = 2x - 1$ 에 대하여 $f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(1) + \cdots + f^{(2008)}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2008

해설

$f(1) = 1$,
$f^{(2)}(x) = (f \circ f)(x) = f(2x-1) = 4x-3$ 에서 $f^{(2)}(1) = 1$,
$f^{(3)}(x) = (f \circ f^{(2)})(x) = f(4x-3) = 8x-7$ 에서 $f^{(3)}(1) = 1$
$f^{(4)}(x) = (f \circ f^{(3)})(x) = f(8x-7) = 16x-15$ 에서 $f^{(4)}(1) = 1$
이다.
이와 같이 추론하면 $f^{(n)}(x) = 2^n x - (2^n - 1)$, $f^{(n)}(1) = 1$ 이다.
$\therefore\ f(1) + f^{(2)}(1) + f^{(3)}(1) + \cdots + f^{(2008)}(1) = 1 \times 2008 = 2008$