

1. 두 점 A(-3), B(6) 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\overline{AB} = |6 - (-3)| = 9$$

2. 두 점 $(0, 0)$, $(4, -3)$ 사이의 거리를 구하면?

① 7

② 6

③ 5

④ 4

⑤ 3

해설

$$\sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

3. 두 점 A $(-2, 2)$, B $(5, 5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표는?

① $(1, 0)$

② $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

③ $(2, 0)$

④ $(3, 0)$

⑤ $(4, 0)$

해설

x 축 위의 점을 P $(x, 0)$ 이라 하면, $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로
 $(x + 2)^2 + 2^2 = (x - 5)^2 + 5^2 \Rightarrow 14x = 42 \Rightarrow x = 3$
 $\therefore$ P $(3, 0)$

4. 두 점 A(-5, -1), B(4, -5)에서 같은 거리에 있는 $y = -x$ 위에 있는 점의 좌표는?

- ① $\left(\frac{15}{26}, \frac{15}{26}\right)$ ② $\left(\frac{13}{26}, -\frac{13}{26}\right)$ ③ $\left(\frac{13}{26}, -\frac{15}{26}\right)$
④ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{13}{26}\right)$ ⑤ $\left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$

해설

구하는 점을 P(a , $-a$) 라 하면, ($\because y = -x$)

$$\overline{PA} = \overline{PB} \Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(a+5)^2 + (-a+1)^2 = (a-4)^2 + (-a+5)^2$$

$$a^2 + 10a + 25 + a^2 - 2a + 1$$

$$= a^2 - 8a + 16 + a^2 - 10a + 25$$

$$\Rightarrow 26a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{26}$$

$$\therefore P(a, -a) = \left(\frac{15}{26}, -\frac{15}{26}\right)$$

5. 세 점 A(1, 2), B(3, -2), C(-5, -1) 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 는 어떤 삼각형인가?

① 이등변 삼각형

② 예각삼각형

③ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형

④ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

⑤ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

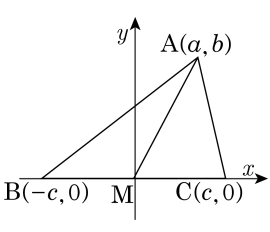
$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-5-3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{65}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1+5)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ 에서}$$

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 $\triangle ABC$ 는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

6. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 을 증명하는 과정이다.



직선 BC를 x 축, 중점 M을 지나고 변 BC에 수직인 직선을 y 축으로 잡고, 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 라 하면
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (a + c)^2 + b^2 + (a - c)^2 + b^2 =$ (가)이고,
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$
 따라서 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 =$ (나)
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 =$ (다) $(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

위

의 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① $a^2 + b^2 + c^2, a^2 + b^2 + c^2, 1$
- ② $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 1$
- ③ $2(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 2$
- ④ $2(a^2 + b^2 + c^2), 2(a^2 + b^2 + c^2), 2$
- ⑤ $3(a^2 + b^2 + c^2), a^2 + b^2 + c^2, 3$

해설

$A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 이므로
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$
 $= \{(-c - a)^2 + (0 - b)^2\} + \{(c - a)^2 + (0 - b)^2\}$
 $= (c^2 + 2ca + a^2 + b^2) + (c^2 - 2ca + a^2 + b^2)$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2)$
 $\overline{AM}^2 = a^2 + b^2, \overline{BM}^2 = c^2$ 이므로
 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = a^2 + b^2 + c^2$
 $\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

7. 두 점 A(2, -5), B(-1, 1)에 대해서 선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표를 구하면?

① (0, 0)

② (2, -1)

③ (1, -1)

④ (0, -1)

⑤ (1, 0)

해설

내분점 공식을 이용하면,

$$P = \left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times (-5)}{2 + 1} \right)$$

$\therefore (0, -1)$

8. 세 점 $A(3, 4)$, $B(-2, -2)$, C 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심 G 의 좌표가 $\left(2, \frac{2}{3}\right)$ 일 때, 점 C 의 좌표는?

- ① $(5, 0)$ ② $(-5, 1)$ ③ $(5, 1)$
④ $(6, 0)$ ⑤ $(-6, 1)$

해설

$C(a, b)$ 라 하면

$$\left(2, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3-2+a}{3}, \frac{4-2+b}{3}\right)$$

$$\therefore (a, b) = (5, 0)$$

9. 네 점 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$

② $\frac{4}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

10. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a + b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a - b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

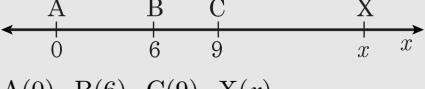
해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

11. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?
- ① 6 km ② 9 km ③ 12 km
- ④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X 라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
 $|x - 0| = 2|x - 9|$
곧, $|x| = 2|x - 9|$
 $\therefore 2(x - 9) = \pm x$
 $\therefore x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

12. 두 점 A(4, -3), B(a, 3) 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

두 점 A(4, -3), B(a, 3) 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - 8a + 52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

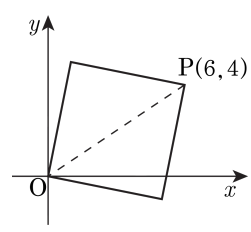
$$a^2 - 8a - 20 = 0$$

$$(a-10)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 10 (\because a > 0)$$

13. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

- ① 16 ② 20 ③ 26
④ 32 ⑤ 52



해설

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면
 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

14. 두 점 A(-3, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표는?

① (-3, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (-1, 0)

⑤ (5, 0)

해설

x 축 위의 점을 P(x, 0)라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 이므로

$$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$$

$$14x = 28$$

따라서 $x = 2$ 즉, P(2, 0)

15. 두 점 $A(-1, 4)$, $B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9, a = 2$
 $\therefore P = (2, 0)$
 $a + b = 2$

16. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$ 가 $\angle A$ 가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 가 직각이므로

피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \dots \textcircled{1}$$

이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 에 대하여

$$\overline{AB}^2 = (-1 - a)^2 + (-5 - 3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{CA}^2 = (a - 3)^2 + (3 - 7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$$\overline{BC}^2 = (3 + 1)^2 + (7 + 5)^2 = 160 \text{ 이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에 의해 } 2a^2 - 4a + 90 = 160$$

$$\therefore a^2 - 2a - 35 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a 의 값들의 합은 2이다.

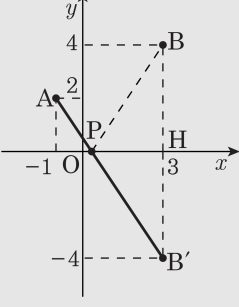
17. 두 점 A (-1, 2) , B (3, 4) 에 대하여 점 P 가 x 축 위를 움직일 때, AP + BP 의 최솟값은?

- ① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B'이라 하면 B' (3, -4)
 $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{B'P}$
따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최소거리는 $\overline{AP} + \overline{B'P}$ 의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B'이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{AB'}$ 이 최소거리이다.

$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(3+1)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13}$



18. 좌표평면 위의 두 점 A(3,2) , B(5,4) 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 PA + PB 의 최솟값은?

- ① 6
- ② $\sqrt{37}$
- ③ $\sqrt{38}$
- ④ $\sqrt{39}$
- ⑤ $\sqrt{40}$

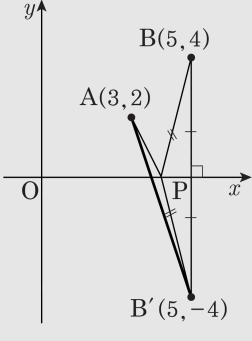
해설

다음 그림과 같이 점 B(5, 4) 를 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 B'(5, -4) 라 하면
 $\overline{PB} = \overline{PB'}$ 이므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PA} + \overline{PB'} \geq \overline{AB'}$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$$\overline{AB'} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$



19. 두 점 A(1),B(5)에 대하여 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 P와 선분 AB를 3 : 1로 외분하는 점 Q 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{3 \times 5 + 1 \times 1}{3 + 1} = 4$$

∴ P(4)

$$\frac{3 \times 5 - 1 \times 1}{3 - 1} = 7$$

∴ Q(7)

$$\therefore PQ = |7 - 4| = 3$$

20. 길이가 3인 선분을 같은 방향으로 2 : 1로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

길이가 3인 선분을 OA 라 하고,
O를 원점으로 잡으면 A는 A(3)
이 선분을 2 : 1로 내분하는 점을 P(x_1)라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 3 + 1 \times 0}{2 + 1} = 2$$

2 : 1로 외분하는 점 Q(x_2) 라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 3 - 1 \times 0}{2 - 1} = 6$$

$$\text{따라서 } \overline{PQ} = 6 - 2 = 4$$

21. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 네 꼭짓점의 좌표가 각각 A(1, 5), B(-1, 3), C(-1, -1), D(a, b) 일 때, 상수 a, b 의 곱 ab 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

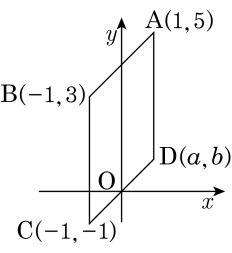
해설

평행사변형의 성질에 의해 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 두 선분 AC 와 BD 의 중점은 일치한다.

즉, $\left(\frac{1+(-1)}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{-1+a}{2}, \frac{3+b}{2}\right)$

$\therefore a = 1, b = 1$

$\therefore ab = 1$



22. A (4, 7), B (3, 2), C (5, 3), D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행 사변형일 때, $y - x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$$\therefore x+3=9, y+2=10$$

$$\therefore x=6, y=8$$

23. $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2, 5)$, C $(7, 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

- ① $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$ ② $G\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ③ $G\left(2, \frac{8}{3}\right)$
 ④ $G\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ ⑤ $G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, 4\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$$

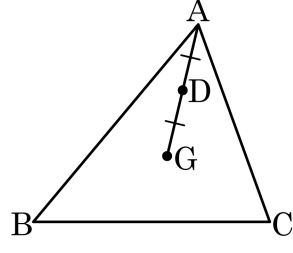
구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G (x, y) 라 하면

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}, y = \frac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}, y = 2$$

$$\therefore G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

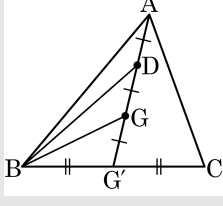
24. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이고 점 D는 $\overline{AG}$ 의 중점일 때, $\frac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만난 점을 G' 이라고 하면



$\overline{BG'} = \overline{G'C}$ 에서

$$\triangle ABG' = \frac{1}{2}\triangle ABC$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{AG'} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle DBG &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle ABC \\ &= \frac{1}{6}\triangle ABC \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \frac{1}{6}$$

25. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

① (0, 0)

② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$

⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

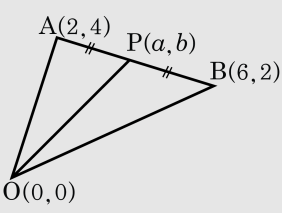
$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

26. 세 점 $O(0, 0)$, $A(2, 4)$, $B(6, 2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a, b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 3
- ② 4
- ③ 5
- ④ 6
- ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
높이가 같으므로
 $\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
 P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.
이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $P(4, 3)$ 이므로 $a = 4, b = 3$
 $\therefore a + b = 7$



27. 두 점 A(-5, 1), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 $y = -x$ 위에 있는 점의 좌표는?

- ① $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$
④ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

해설

구하는 점을 $P(a, -a)$ 라 하면 ($\because y = -x$)

$$\overline{PA} = \overline{PB}$$

$$\Rightarrow \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$$

$$(a+5)^2 + (a+1)^2 = (a-4)^2 + (a+5)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore P(a, -a) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

28. 삼각형 ABC의 외접원의 중심 P가 x 축 위에 있고, 두 점 A,B의 좌표가 각각 A(-2,1),B(3,4) 일 때, 점 P의 x 좌표는?

- ① 1
- ② $\frac{4}{3}$
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ 2
- ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

점 P가 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$

점 P의 좌표를 $(a, 0)$ 으로 놓으면

$$\sqrt{(a+2)^2+(-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2+(-4)^2}$$

양변 제곱하여 정리하면

$$a^2+4a+5 = a^2-6a+25, 10a = 20$$

$$\therefore a = 2$$

29. 두 점 A(2, -1), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, △OPQ의 외심의 좌표를 (x, y)라 할 때, x + y의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P(a, 0), Q(0, b)라 하면
 $(2 - a)^2 + (-1 - 0)^2 = (6 - a)^2 + (3 - 0)^2 \dots \textcircled{A}$
 $(2 - 0)^2 + (-1 - b)^2 = (6 - 0)^2 + (3 - b)^2 \dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 에서 $a = 5$, $\textcircled{B}$ 에서 $b = 5$
△OPQ의 외심을 (x, y)라 하면
 $x^2 + y^2 = (x - 5)^2 + y^2 = x^2 + (y - 5)^2$
 $\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$
 $\therefore x = y = \frac{5}{2}$
따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$
 $\therefore x + y = 5$

30. △ABC에서 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P(*a*, *b*)라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2$
.....㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2$ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a - b - 16 = 0, 2a - b - 6 = 0$

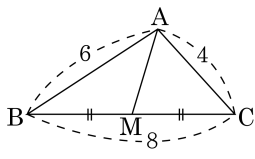
연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 (2, -2)이다.

(2) $\overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$

∴ $PA = 5$

31. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로
 $6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$
 $36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
 $\therefore \overline{AM}^2 = 10$

32. 다음은 $\triangle ABC$ 에서 변 BC 의 중점을 M 이라고 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이 성립함을 보이는 과정이다. ㉠ ~ ㉤에 들어갈 말을 나열한 것으로 옳은 것은?

다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 한 변 BC 를 x 축, 변 BC 의 수직이등분선을 y 축으로 잡으면 M 은 원점이 된다.

이때, 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$ 으로 놓으면

㉠ $= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$
 $= 2(a^2 + b^2 + c^2) \cdots \text{㉡}$
 ㉢ $= (a^2 + b^2) + (-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \cdots \text{㉣}$
 ㉤, ㉣으로부터
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$

1. $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$

2. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

3. $\overline{AB} + \overline{AC}$, $\overline{AM} + \overline{BM}$

3. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$

4. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$

해설

파푸스의 정리에서

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\}$$

$$= 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = (a^2 + b^2) + (-c)^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2$$

$$\therefore \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$$

33. 좌표평면 위의 네 점 A(1, 2), P(0, b), Q(a, 0), B(5, 1)에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값을 k 라 할 때, k^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

점 A (1, 2)의 y축에 대하여 대칭인 점을 A'(-1, 2), 점 B(5, 1)의 x축에 대하여 대칭인 점을 B'(5, -1)이라 하면
 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'}$
 $\geq \overline{A'B'} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45}$
따라서 $k = \sqrt{45}$ 이므로 $k^2 = 45$

34. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m, 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

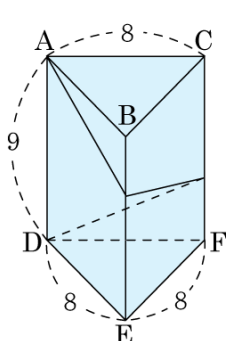
▶ 답: m

▶ 정답 : 30m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$
 $\therefore a = 30(\text{m})$

35. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

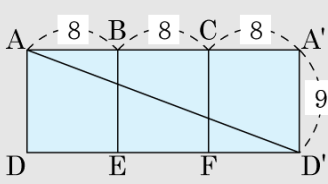


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$$\overline{AD'} = \frac{\sqrt{24^2 + 9^2}}{\sqrt{576 + 81}} = \frac{\sqrt{657}}{\sqrt{657}} = 3\sqrt{73}$$



36. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 4), B(-2, 6), C(6, 8) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 에서 변 AB의 중점을 P, 변 BC의 중점을 Q, 변 CA의 중점을 R이라 하자. $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\triangle ABC$ 의 무게중심과 각 변의 중점을 연결하여 만든 $\triangle PQR$ 의 무게중심은 같다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + (-2) + 6}{3}, \frac{4 + 6 + 8}{3} \right) = (2, 6)$$

따라서 $a = 2, b = 6$

$$\therefore a + b = 8$$

37. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $G(2, -1)$ 이고 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 $P(a, 3)$, $Q(-2, -2)$, $R(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC의 무게중심과 삼각형 PQR의 무게중심은 일치한다.

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

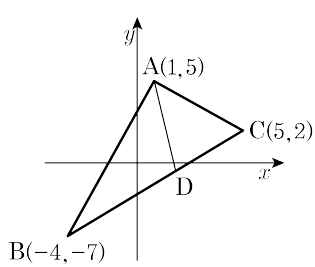
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로

$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$

또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$

$\therefore a + b = -1$

38. 다음 그림과 같이 세 점 A(1, 5), B(-4, -7), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ② $\left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}\right)$
 ③ $(2, -1)$ ④ $\left(\frac{7}{4}, -\frac{5}{4}\right)$
 ⑤ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$

해설

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+4)^2 + (5+7)^2} = 13$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 13 : 5$$

$$\therefore D\left(\frac{-20+65}{13+5}, \frac{-35+26}{13+5}\right) = D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

39. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,6)$, $B(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?
- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

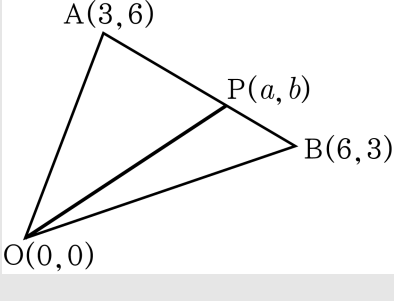
해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 넓이가 같으므로 $\triangle OAP = 2\triangle OBP$ 이려면 P 는 두 점 A, B 를 $2:1$ 로 내분하여야 한다.

따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $P(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



40. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 - 6a + 13 = 10 \text{ 즉 } a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = 10 \text{ 즉 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13 \text{ 즉 } 6a = 12$$

$$\therefore a = 2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$$

41. 세 점 A(6, 2) B(0, -6), C(7, -5)를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3, -2)$$

$$\therefore 3ab = -18$$

42. 좌표평면 위의 두 점 A(7, 4), B(8, 6) 과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x 좌표를 a 라 할 때, $5a$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

A(7, 4)를 $y = x$ 에 대칭이동한 점 C(4, 7)에 대하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y = x$ 의 교점이다.

$$y = -\frac{1}{4}x + 8 \text{와 } y = x \text{의 교점은 } \left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$$

$$\therefore 5a = 32$$

43. x, y 가 실수일 때, $\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$ 의
최솟값은?

- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

다음 그림에서

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

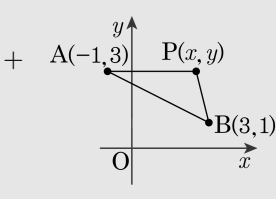
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}$$

$= \overline{AP} + \overline{BP}$ 를 의미 하므로

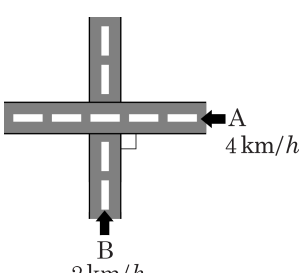
$$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$$

그러므로 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은

$$\overline{AB} = \sqrt{(3+1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{5}$$



44. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, -4) 이고
 t 시간 후의 A, B 의 좌표는
 A(6 - 4 t , 0), B(0, -4 + 2 t) 이다.
 따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6 - 4t)^2 + (-4 + 2t)^2}$$

$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$

$$= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52}$$

$$= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$$
 이므로
 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.
 $\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

45. 두 점 A(2, 3), B(0, -1)를 이은 선분 AB, 또는 그연장선 위에 $\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 인 점 C 는 두 개가 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리는?

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

해설

$\overline{AB} = 2\overline{BC}$ 만족시키는 C 는 $\overline{AB}$ 의 1 : 1 내분점이거나 3 : 1 외분점이다.

i) 1 : 1 내분점은 $\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (1, 1)$

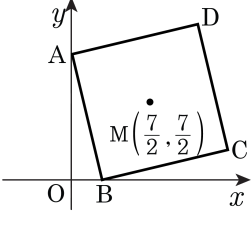
ii) 3 : 1 외분점은

$\left(\frac{3 \times 0 - 1 \times 2}{3 - 1}, \frac{3 \times (-1) - 1 \times 3}{3 - 1}\right) = (-1, -3)$

i), ii) 사이 거리는

$\sqrt{(1+1)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5}$

46. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 정사각형 ABCD의 중심 M의 좌표가 $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$ 일 때, $\triangle OAB$ 의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

다음 그림과 같이 두 점 A, B의 좌표를 $A(0, a), B(b, 0)$ 이라 하고 점 D를 지나면서 x 축에 평행한 직선이 y 축과 만나는 점을 E라 하면 $\triangle OAB \cong \triangle EDA$

따라서 $\overline{AE} = \overline{BO} = b, \overline{DE} = \overline{AO} = a$

이므로 $D(a, a+b)$

이 때, 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$$M\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$$

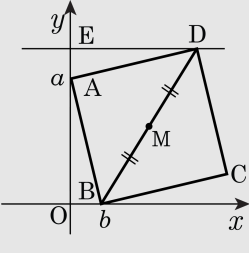
$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} = \frac{7}{2} \text{에서 } a+b=7$$

또, 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 5이므로

$\triangle OAB$ 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\sqrt{a^2+b^2}=5, a^2+b^2=25$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle OAB &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\} \\ &= \frac{1}{4}(7^2 - 25) = 6 \end{aligned}$$



47. $\triangle ABC$ 의 세 변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2, 7)$, $(-6, 4)$, $(5, -2)$ 일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 (a, b) 이다. 이 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1, b_1)$ $B(a_2, b_2)$ $C(a_3, b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2} \right),$$

$$\left(\frac{a_2 + a_3}{2}, \frac{b_2 + b_3}{2} \right),$$

$$\left(\frac{a_3 + a_1}{2}, \frac{b_3 + b_1}{2} \right) \text{ 이고}$$

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \right) \text{ 로}$$

$\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G = \left(\frac{-2 - 6 + 5}{3}, \frac{7 + 4 - 2}{3} \right) = (-1, 3)$$

$\therefore 2$

48. 세 점 $A(-2, 0)$, $B(-1, \sqrt{3})$, $C(1, -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

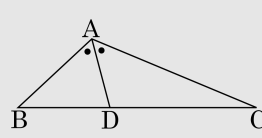
① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 1 : 4 ④ 2 : 3 ⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로

$$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$$



49. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A(2, 4), B(0, 2)로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 (a, a) 으로 놓으면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$
양변 제곱하여 정리하면
 $2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4, 8a = 16$
 $\therefore a = 2$
따라서 점 P의 좌표는 (2, 2)이므로 다음 그림에서
(□ABOP의 넓이)
= (△OBP의 넓이) + (△ABP의 넓이)
= $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

50. 네 개의 공장 A, B, C, D는 A 공장을 기준으로 B 공장은 정동방향으로 100 m 이동한 다음 정북방향으로 20 m 이동한 지점에, C 공장은 정동방향으로 120 m 이동한 다음 정북방향으로 60 m 이동한 지점에, D 공장은 정동방향으로 40 m 이동한 다음 정북방향으로 80 m 이동한 지점에 있다. 네 개의 공장에서 흘러나오는 폐수를 정화하기 위해 배관시설에 드는 비용을 최소로 하여 정화시설을 만들려고 할 때, 정화시설은 A 공장으로부터 정동방향으로 a m, 정북방향으로 b m 인 지점이다. 이때, $a + 2b$ 의 값을 구하면? (단, 각 공장에서 정화시설까지 하수도배관이 묻히는 고도는 무시하여 연결되며 비용은 배관의 길이에 비례한다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 160

해설

점 A 를 원점으로 하여 공장 B, C, D 의 위치를 좌표평면 위에 나타내면 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대하여

$$\overline{AP} + \overline{CP} \geq \overline{AC} \text{ 이고 } \overline{BP} + \overline{DP} \geq \overline{BD}$$

이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} + \overline{DP} \geq \overline{AC} + \overline{BD}$$

점 P 가 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점일 때 각 공장에서 정화시설까지의 거리가 최소이다.

$$\overline{AC} \text{의 방정식은 } y = \frac{1}{2}x, \overline{BD} \text{의 방정식은}$$

$$y = -x + 120 \text{ 이고, 교점의 좌표는 } (80, 40)$$

$$\text{따라서 } a = 80, b = 40$$

$$\therefore a + 2b = 160$$

