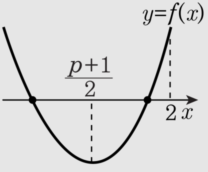
1. x에 대한 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2-p=0$의 서로 다른 두 근이 모두 2보다 작을 때, 양수 p의 값의 범위는?

① $0<p<1$　　② $\frac{1}{2}<p<1$　　③ $1 \le p < 2$

④ $1<p<\frac{4}{3}$　　⑤ $p>1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2-p$ 라 하면 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$ 의 판별식을 D라 하면

$\mathrm{D}=(\mathrm{p}+1)^2-4(2-\mathrm{p})>0$

$p^2+6p-7>0,\ (p+7)(p-1)>0$

$\therefore p<-7$ 또는 $p>1$

(ii) $f(2)>0$ 에서 $2^2-(p+1)\cdot 2+2-p>0$

$3p<4$

$\therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) $y=f(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{p+1}{2}$ 이므로

$\frac{p+1}{2}<2$

$\therefore p<3$

(i), (ii), (iii) 에서 $p<-7$ 또는 $1<p<\frac{4}{3}$

그런데 $p>0$ 이므로 $1<p<\frac{4}{3}$

2. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$　② $m \le -4$　③ $m \le -2$
④ $m \le 0$　⑤ $m \le 2$

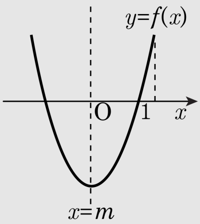
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\frac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\frac{D}{4}=m^2-m-6\ge 0$

$(m+2)(m-3)\ge 0$

$\therefore m\le -2$ 또는 $m\ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 축 : $m<1$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m\le -2$

3. 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m<k\le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ -15 ④ -12 ⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4=4-k\ge 0,\ k\le 4$

ⅱ) $f(3)>0,\ k>3$ 따라서,

ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3<k\le 4$

$m=3,\ n=4$ 이므로 $mn=12$

4. 이차방정식 $x^2 - 2(m-4)x + 2m = 0$ 의 근에 대하여 다음 조건을 만족하도록 실수 m 의 값의 범위를 차례로 정한 것은 보기 중 어느 것인가?

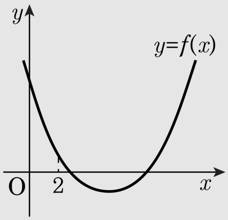
보기

(i) 두 근이 모두 2보다 크다.
(ii) 2가 두 근 사이에 있다.

① $8 \le m < 10$, $m > 10$　② $8 \le m < 10$, $m > 8$
③ $-10 \le m < 10$, $m > 10$　④ $-10 \le m < 10$, $m > 8$
⑤ $8 \le m < 10$, $m > 12$

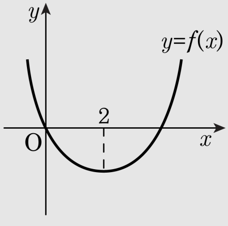
해설

(i) 경계값 $x = 2$ 에서



$f(2) > 0$
축의 위치 $m - 4 > 2$
판별식 $D \ge 0$
$\therefore\ 8 \le m < 10$

(ii)



$f(2) < 0$ 이기만 하면 된다.
$\therefore\ m > 10$

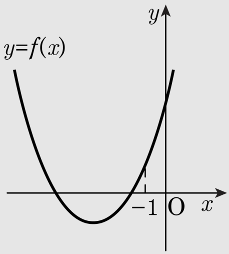
5. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면
방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6-k) > 0$ 에서
$k^2 + k - 6 > 0$, $(k+3)(k-2) > 0$
$\therefore$ $k < -3$ 또는 $k > 2$
(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$
이상에서 $-7 < k < -3$
따라서 정수 k 는 -6, -5, -4 의 3 개다.

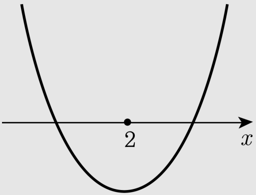
6. 이차방정식 $x^2 - mx + 2 = 0$이 2보다 큰 근과 2보다 작은 근을 가질 때 m의 값의 범위를 구하면?

① $m > -1$　② $m > 1$　③ $m > -2$

④ $m > 2$　⑤ $m > 3$

해설

주어진 이차방정식의 근이 2보다 크
고 2보다
작은 근을 가지면 $f(2) < 0$
$f(2) = 4 - 2m + 2 < 0$이므로 $m > 3$



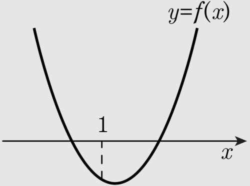
7. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$ ② $m > -2$ ③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$ ⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

$\therefore\ m > 5$

8. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

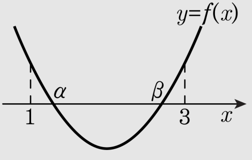
▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면

$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a + 4)(a - 4) > 0$

$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$

$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \dfrac{13}{3}$

$\therefore\ a < \dfrac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이

$x = \dfrac{a}{2}$ 이므로 $1 < \dfrac{a}{2} < 3$

$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \dfrac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4,\ \beta = \dfrac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

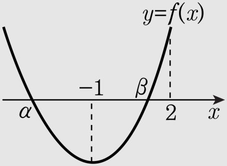
9. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 $\alpha,\ \beta$에 대하여 $\alpha < -1 < \beta < 2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2 < a < 0$　　② $-2 < a < 1$　　③ $0 < a < 2$

④ $1 < a < 2$　　⑤ $1 < a < 3$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + a^2 - 1$ 로 놓으면 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1) < 0,\ f(2) > 0$

(ⅰ) $f(-1) = 1-2a+a^2-1 < 0$ 에서 $a^2-2a < 0,\ a(a-2) < 0$

$\therefore 0 < a < 2$

(ⅱ) $f(2) = 4 + 4a + a^2 - 1 > 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 > 0,\ (a+3)(a+1) > 0$

$\therefore a < -3,\ a > -1$

(ⅰ), (ⅱ) 에서 $0 < a < 2$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2 - x + k = 0$의 한 근만이 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$의 두 근 사이에 있을 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $1 < k < 2$ ② $-2 < k < 0$

③ $-2 \le k \le 0$ ④ $k < -2$ 또는 $k > 0$

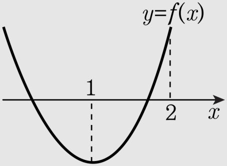
⑤ $-2 < k < -1$

해설

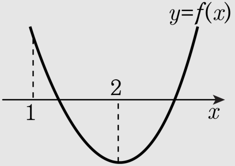
$x^2 - 3x + 2 = 0$ 에서 $(x-1)(x-2) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 - x + k$ 로 놓으면 다음 그림과 같이 $y = f(x)$ 의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$ 사이에서 x 축과 만나야 한다.



또는



$\therefore f(1) < 0,\ f(2) > 0$ 또는 $f(1) > 0,\ f(2) < 0$

즉, $f(1)f(2) = k(k+2) < 0$

$\therefore -2 < k < 0$

11. 이차방정식 $x^2-(a+1)x-3=0$의 한 근이 3보다 크고, 다른 한 근은 3보다 작을 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a>-3$　　② $a>-1$　　③ $a>1$

④ $a<1$　　⑤ $a<3$

해설

$f(x)=x^2-(a+1)x-3$이라 하면

방정식 $f(x)=0$의 두근 사이에 3이 있으므로

$f(3)=9-3(a+1)-3<0$

$-3a+3<0$

$\therefore\ a>1$

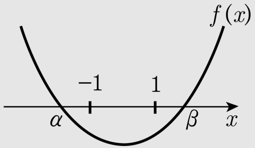
12. 방정식 $x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1 보다 작고 다른 한 근은 1 보다 클 때, 실수 p의 값의 범위는 ?

① $p>-2$ ② $p>-1$ ③ $p<-2$

④ $p<-1$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2+px+2p+1=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면



(i) $f(-1)=p+2<0$ $\therefore p<-2 \cdots$ ①

(ii) $f(1)=3p+2<0$ $\therefore p<-\dfrac{2}{3} \cdots$ ②

①, ② 에서 $p<-2$

13. $|p| < 2$를 만족하는 모든 실수 p에 대하여 부등식 $x^2 + px + 1 > 2x + p$가 성립하도록 하는 x의 값의 범위는?

① $x \le -3$, $x = -1$, $x \ge 1$
② $x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$
③ $x \le -3$, $x \ge 1$
④ $x \le -1$, $x \ge 3$
⑤ $-3 \le x \le -1$

해설

$x^2 + px + 1 > 2x + p$, $(x-1)p + x^2 - 2x + 1 > 0$

$f(p) = (x-1)p + x^2 - 2x + 1$이라 하면, $f(p) > 0$이다.

$-2 < p < 2$에서 $f(p) > 0$이기 위한 조건은 $f(-2) \ge 0$ 이고 $f(2) \ge 0$ 이어야 한다.

$f(-2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 4x + 3 \ge 0$

$\therefore \ (x-1)(x-3) \ge 0$

$\therefore \ x \le 1$, $x \ge 3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f(2) \ge 0$ 에서 $x^2 - 1 \ge 0$

$\therefore \ (x+1)(x-1) \ge 0$

$\therefore \ x \le -1$, $x \ge 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\therefore \ x \le -1$, $x = 1$, $x \ge 3$

그런데 $x = 1$ 일 때 $f(p) = 0 \cdot p + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$ 이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

따라서 구하는 x값의 범위는 $x \le -1$, $x \ge 3$

14. 이차방정식 $x^2-(p+1)x+2p-1=0$ 의 두 근 중 한 근은 -1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 크도록 실수 p의 범위를 정하면?

① $p>-\frac{1}{3}$ ② $p>1$ ③ $-\frac{1}{3}<p<1$
④ $p<-\frac{1}{3}$ ⑤ $p<1$

해설

$f(x)=x^2-(p+1)x+2p-1$로 놓으면

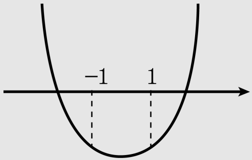
i) $f(-1)=1+p+1+2p-1=3p+1<0$

$\therefore p<-\frac{1}{3}$

ii) $f(1)=1-p-1+2p-1=p-1<0$

$\therefore p<1$

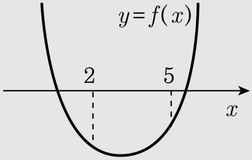
i) ii)에서 $p<-\frac{1}{3}$



15. 이차방정식 $x^2-7x+10=0$ 의 두 근이 이차방정식 $x^2-6x+k=0$ 의 두 근 사이에 있기 위한 정수 k 의 최댓값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설



이차방정식 $x^2-7x+10=0$에서
$(x-2)(x-5)=0$ $\therefore$ $x=2$ 또는 $x=5$
$f(x)=x^2-6x+k$로 놓으면 함수 $y=$
$f(x)$의
그래프는 다음 그림과 같아야 한다.
따라서 $f(2)<0$, $f(5)<0$ 이므로
$f(2)=-8+k<0$에서 $k<8$
$f(5)=-5+k<0$에서 $k<5$
$\therefore$ $k<5$ $\therefore$ 정수 k의 최댓값은 4 이다.

16. 이차방정식 $x^2-(a+2)bx+(a+1)b=0$ $(a>0,\ b>0)$이 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 두 개의 근이 모두 1보다 크기 위해서 필요한 조건은?

① $b>1$ ② $b<1$ ③ $b>2$ ④ $b<2$ ⑤ $b>3$

해설

실근을 가질 조건은 $(a+2)^2b^2-4(a+1)b>0$

$\therefore\ b>\dfrac{4(a+1)}{(a+2)^2}\cdots$ (i)

여기서, 두 근이 모두 1 이하라 하면

(두 근의 합)$=(a+2)b\le 2\cdots$ (ii)

(i), (ii)에서 $\dfrac{4(a+1)}{a+2}<2$

$\therefore\ a<0$

이것은 문제의 조건에 모순된다.

∴ 적어도 한 개의 근은 1보다 크다.

그러므로 $f(1)>0$이면 두 근이 모두 1보다 크게 된다.

$\therefore f(1)=1-(a+2)b+(a+1)b>0\quad\therefore\ b<1$

17. 두 방정식 $x^2+x-p=0$, $x^2-3x-q=0$ 의 각각의 한 근은 반올림하면 1 이 된다고 한다. 이 때, $p-q$ 값의 범위는?

① $2<p-q<5$　② $3\le p-q<5$　③ $3<p-q\le 6$

④ $5\le p-q\le 6$　⑤ $2\le p-q<6$

해설

$f(x)=x^2+x-p$, $g(x)=x^2-3x-q$ 라 하면 방정식 $f(x)=0$ 과 $g(x)=0$ 이 $\frac{1}{2}$ 이상 $\frac{3}{2}$ 미만인 근을 가져야 한다.

(i) $f(x)=x^2+x-p$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)-p\le 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)-p>0$$

$$\therefore \frac{3}{4}\le p<\frac{15}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) $g(x)=x^2-3x-q$ 의 그래프의 대칭축은 직선 $x=\frac{3}{2}$ 이므로

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1}{2}-q\ge 0$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2-3\cdot\frac{3}{2}-q<0$$

$$\therefore -\frac{9}{4}<q\le -\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠ − ㉡에서 $2\le p-q<6$