1. 이차함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 일 때, $f(2) + f(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 에서 $f(2) = 1$, $f(-1) = -2$

$\therefore f(2) + f(-1) = -1$

2. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동시켰을 때 꼭짓점의 좌표는?

① $(0, 0)$　　② $(0, -2)$　　③ $(3, 0)$

④ $(0, 3)$　　⑤ $(-2, 0)$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동시켰으므로 $y = 2x^2 + 3$ 이다.
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 3)$ 이다.

3. 이차함수 $y = 2(x+3)^2$ 의 그래프에 대한 설명이다. 다음 보기 중 옳은 것을 골라라.

보기

㉠ 위로 볼록한 포물선이다.

㉡ 직선 $x = 3$ 을 축으로 한다.

㉢ 꼭짓점의 좌표는 (3, 0) 이다.

㉣ $y = -2x^2$ 의 그래프와 포물선의 폭이 같다.

㉤ $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 그래프이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉠ 아래로 볼록한 포물선이다.
㉡ $x = -3$ 을 축으로 한다.
㉢ 꼭짓점의 좌표는 (−3, 0) 이다.
㉤ $y = 2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 −3 만큼 평행이동한 그래프이다.

4. 이차함수 $y = 4(x+3)^2 + 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은?

① $y = 4(x+1)^2 + 2$
② $y = 4(x+5)^2 + 2$
③ $y = \frac{1}{4}(x+1)^2 + 2$
④ $y = 4(x-1)^2 + 3$
⑤ $y = -4(x-2)^2 - 3$

해설

$y = 4(x+3-2)^2 + 5 - 3 = 4(x+1)^2 + 2$

5. 이차함수 $y = -5x^2 + 20x + 3$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. $a + b$ 의 값은?

① 20 ② 22 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

해설

$y = -5x^2 + 20x + 3$
$= -5(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3$
$= -5(x - 2)^2 + 23$
$\therefore a = 2,\ b = 23$
$\therefore a + b = 2 + 23 = 25$

6. 다음 보기에서 y 가 x 에 관한 이차함수가 아닌 것을 골라라.

보기

㉠ 한 모서리의 길이가 x 인 정육면체의 겉넓이 y
㉡ 가로의 길이, 세로의 길이가 각각 $2x$, $x+3$ 인 직사각형의 둘레의 길이
㉢ 반지름의 길이가 x 인 원의 넓이 y
㉣ 밑면의 반지름의 길이가 x , 높이가 7 인 원기둥의 부피 y

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

식으로 나타내면 다음과 같다.
㉠ $y=6x^2$
㉡ $y=2(2x+x+3)=6x+6$: 일차함수
㉢ $y=\pi x^2$
㉣ $y=7\pi x^2$
따라서 y 가 x 에 관한 이차함수가 아닌 것은 ㉡이다.

7. 이차함수 $f(x) = -2x^2 - 3x + a$ 의 그래프가 두 점 $(-1, 7)$, $(2, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 를 차례대로 나열하면?

① $a = 4, b = -6$
② $a = -4, b = -6$
③ $a = 4, b = -8$
④ $a = 6, b = -6$
⑤ $a = 6, b = -8$

해설

점 $(-1, 7)$ 를 $f(x) = -2x^2 - 3x + a$ 가 지나므로 $7 = -2(-1)^2 - 3(-1) + a, a = 6$ 이다.
$f(x) = -2x^2 - 3x + 6$ 이고 점 $(2, b)$ 를 지나므로 $b = -2(2)^2 - 3(2) + 6, b = -8$ 이다.

8. 원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 의 값이 -1 에서 5 까지 증가할 때, y 의 값은 24 만큼 감소한다. 다음 중 이 그래프 위에 있는 점은?

보기

㉠ $(2,\ -4)$ ㉡ $(-4,\ -16)$ ㉢ $(3,\ 9)$

㉣ $(-4,\ -32)$ ㉤ $(4,\ -2)$

① ㉠,㉡ ② ㉠,㉣ ③ ㉡,㉣ ④ ㉢,㉤ ⑤ ㉣,㉤

해설

원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수를 $f(x) = ax^2$ 이라 하자.
$f(x) = ax^2$ 에 대하여 $f(-1) = a,\ f(5) = 25a$ 이므로 $25a - a = -24,\ 24a = -24,\ \ a = -1$ 이다.
$\therefore f(x) = -x^2$
㉠ $f(2) = -1 \times (2)^2 = -4 \quad \therefore (2,\ -4)$
㉣ $f(-4) = -1 \times (-4)^2 = -16 \quad \therefore (-4,\ -16)$
따라서 주어진 그래프 위의 점은 ㉠, ㉡이다.

9. 다음 보기 중 $y = 2x^2$ 과 서로 x 축에 대하여 대칭을 이루는 함수를 고르면?

① $y = 4x^2$ ② $y = \frac{1}{2}x^2$ ③ $y = -2x^2$
④ $y = \frac{1}{4}x^2$ ⑤ $y = x^2$

해설

x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 반대인 이차함수를 찾는다.

10. 다음 중 평행이동에 의하여 포물선 $y=-x^2-2$ 의 그래프와 포갤 수 있는 것은?

① $y=2x^2-3$ ② $y=-2x^2+3$ ③ $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$
④ $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$ ⑤ $y=-x^2-7$

해설

$y=-x^2-2$ 의 그래프와 포갤 수 있는 것은 이차항의 계수가 -1 인 포물선이다.

11. 이차함수 $y = 2x^2 + mx + n$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$ 일 때, $m + n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = 2x^2 + mx + n$ 의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$ 이므로

$y = 2(x-1)^2 + 5 = 2x^2 - 4x + 7$

$\therefore\ m = -4,\ n = 7,\ m + n = -4 + 7 = 3$

12. 이차함수 $y = -4x^2 + 2ax - a + 5$ 의 꼭짓점이 a 의 값에 관계없이 일정할 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

꼭짓점이 a 의 값에 관계없으므로 a 의 값에 관계없이 항상 지나는 점이 꼭짓점이다.

$y = -4x^2 + 2ax - a + 5$
$= -4x^2 + a(2x - 1) + 5$

$2x - 1 = 0,\ x = \frac{1}{2}$

$y = -4 \times \frac{1}{2^2} + 0 + 5 = 4$

꼭짓점은 $\left(\frac{1}{2},\ 4\right)$ 이다.

$y = -4x^2 + 2ax - a + 5$
$= -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$
$= -4x^2 + 4x + 3$

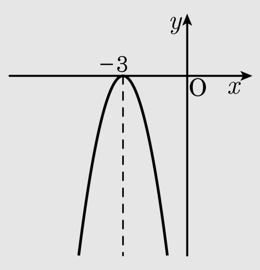
$\therefore\ a = 2$

13. 이차함수 $y=-2(x+3)^2$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값이 감소하는 x 의 값의 범위는?

① $x>0$　② $x>3$　③ $x<-3$
④ $x<3$　⑤ $x>-3$

해설

$y=-2(x+3)^2$ 의 그래프는 다음과 같다.



즉, 위로 볼록이고, 대칭축은 $x=-3$ 이다. $x>-3$ 에서 x 가 증가하면 y 는 감소한다.

14. 이차함수 $y = -x^2 + 2x - 3$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > 1$

해설

$y = -x^2 + 2x - 3$
$y = -(x - 1)^2 - 2$
따라서 꼭짓점이 $(1,\ -2)$ 인 위로 볼록한 그래프이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값이 감소하는 x 의 범위는 $x > 1$

15. 다음 중 주어진 조건을 모두 만족하는 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식은?

보기

㉠ 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같다.
㉡ 꼭짓점은 제 4 사분면 위에 있다.
㉢ 아래로 볼록하다.
㉣ y 절편이 양수이다.

① $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$
② $y=\frac{1}{2}(x+3)^2+1$
③ $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$
④ $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$
⑤ $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2-3$

해설

㉠ 에서 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 폭이 같은 것은 이차항의 계수가 $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 이다.
㉡ 꼭짓점의 x 좌표가 양수, y 좌표가 음수이다.
㉢ 아래로 볼록하므로 이차항의 계수가 양수이다.
㉣ y 절편이 양수이다.
이 조건을 만족하는 이차함수식은 ①이다.

16. 이차함수 $y=-x^2+2x+3$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 나타낼 때, $p+q$ 의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$y=-x^2+2x+3$
$=-(x^2-2x+1-1)+3$
$=-(x-1)^2+4$

$\therefore\ p=1,\ q=4$

$\therefore\ p+q=1+4=5$

17. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2-4x+3$ 의 그래프는 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다. k 의 값은?

① -13 ② -5 ③ 3 ④ 11 ⑤ 13

해설

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}x^2-4x+3 \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-8x+16-16)+3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-4)^2+8+3 \\ &= -\frac{1}{2}(x-4)^2+11 \end{aligned}$$

따라서 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축으로 4 만큼 y 축으로 11 만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore k=11$

18. 다음 이차함수의 그래프 중 $y = 3x^2$ 의 그래프를 평행이동하여 완전히 포갤 수 있는 것을 모두 고르면?

① $y = 3x^2 + 1$

② $y = -3x^2 + 4$

③ $y = \dfrac{9x^2 - 1}{3}$

④ $y = -3(x+1)^2$

⑤ $y = x^2 - 5x + 2 + 2(x-1)(x+1)$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프에서 a 의 값이 같으면 평행이동하여 두 이차함수의 그래프를 완전히 포갤 수 있다.
따라서 $a = 3$ 인 것은 ①, ③, ⑤이다.

19. 이차함수 $y = 4x^2 + kx + 2$ 의 그래프의 꼭짓점이 $y = x - 1$ 의 그래프 위에 있고 $x > a$ 이면 y 의 값이 증가하고, $x < a$ 이면 y 의 값은 감소한다. 이 때 꼭짓점의 좌표를 구하여라. (단, $a < 0$)

① $(-1, -1)$ ② $(-1, -2)$ ③ $(1, 1)$
④ $(1, 2)$ ⑤ $(1, 3)$

해설

축의 방정식이 $x = a$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표가 a 이다.
따라서 $(a, a-1)$ 을 지나므로 $y = 4(x-a)^2 + a - 1 = 4x^2 - 8ax + 4a^2 + a - 1$ 이고 $4a^2 + a - 1 = 2$ 이다.
따라서 $(4a-3)(a+1) = 0$ 이므로 $a = -1 (a < 0)$ 이므로 꼭짓점은 $(-1, -2)$ 이다.

20. $y = x^2 + 2x - 1 + k$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 값의 범위를 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： $k < 2$

해설

$y = x^2 + 2x - 1 + k$

$y = (x+1)^2 + k - 2$

꼭짓점이 $(-1,\ k-2)$ 인 아래로 볼록한 그래프이므로 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\therefore\ k - 2 < 0,\ k < 2$

21. 이차함수 $y = x^2 - 2x + k - 1$ 의 그래프가 x 축과 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위를 구하여라.

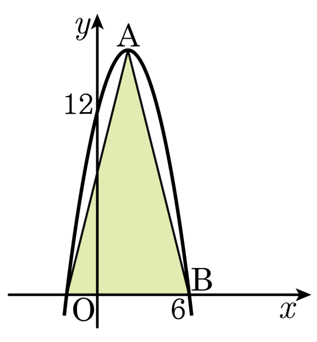
▶ 답:

▷ 정답: $k < 2$

해설

$D/4 = (-1)^2 - (k-1) > 0,\ 1 - k + 1 > 0\ \therefore\ k < 2$

22. 다음 그래프의 식은 $y=-x^2+bx+12$ 이다. $\triangle$AOB 의 넓이는?



① 20 ② 24 ③ 26 ④ 48 ⑤ 64

해설

그래프가 (6, 0) 을 지나므로 $y=-x^2+bx+12$ 에 (6, 0) 을 대입하면

$0=-36+6b+12$

$\therefore\ b=4$

$y=-x^2+4x+12$

$=-(x^2-4x+4-4)+12$

$=-(x-2)^2+16$ 이므로 A(2, 16)

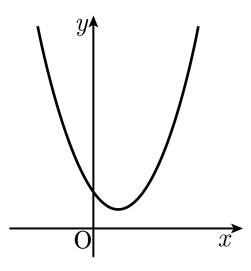
$\therefore\ \triangle\text{AOB}=\frac{1}{2}\times 8\times 16=64$

23. 다음 중 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ -2)$ 이다.
② 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ 의 그래프와 모양이 같다.
③ $x < 4$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
④ $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.
⑤ 제 3 사분면을 지나지 않는다.

해설
③ $y = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 2$, 아래로 볼록하기 때문에, 축의 왼쪽에서는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

24. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $a,\ b,\ c$ 의 부호를 구하면?



① $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$

② $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$

③ $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$

④ $a < 0,\ b > 0,\ c > 0$

⑤ $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$

해설

아래로 볼록하므로 $a > 0$
축이 y 축의 오른쪽에 있으므로 $a,\ b$ 는 다른 부호이므로 $b < 0$
y 절편은 $c > 0$ 이다.

25. 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$ 인 포물선이 두 점 $(2,\ -3)$, $(m,\ -6)$ 을 지날 때, 다음 중 m 의 값이 될 수 있는 것은?

① -1　② 5　③ -3　④ -6　⑤ -9

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$ 이므로
$y=a(x-1)^2-2$ 이고 점 $(2,\ -3)$ 을
지나므로 $-3=a(2-1)^2-2$
$a=-1$ 이다.
$y=-(x-1)^2-2$
점 $(m,\ -6)$ 을 지나므로
$-6=-(m-1)^2-2$
$\therefore\ m=3$ 또는 $m=-1$

26. 세 점 $(0,-6),(1,0),(2,2)$ 을 지나는 포물선의 꼭짓점의 좌표는?

① (1, 1) ② (1, 2) ③ (2, 1)
④ (2, 2) ⑤ (3, 3)

해설

$y=ax^2+bx+c$ 로 놓고 세 점 $(0,-6),(1,0),(2,2)$ 의 좌표를 각각 대입하면
$c=-6, a+b-6=0, 4a+2b-6=2$
$\therefore a=-2, b=8, c=-6$
$\therefore y=-2x^2+8x-6=-2(x-2)^2+2$
따라서 꼭짓점의 좌표는 $(2,2)$ 이다.

27. x 축과의 교점의 x 좌표가 각각 $-2,\ 3$ 이고, 한 점 $(0,\ 6)$ 을 지나는 포물선의 식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 할 때, $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$ 을 지나므로
$y=a(x+2)(x-3)$ 이라 하고 $(0,\ 6)$ 을 대입하면
$6=-6a,\ a=-1$
$y=-(x+2)(x-3)=-x^2+x+6$
$a=-1$, $b=1$, $c=6$
$\therefore\ a+b+c=6$

28. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 $x = 1$ 에서 최솟값 -1 을 갖고 한 점 $(3,\ 7)$ 을 지날 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

꼭짓점이 $(1,\ -1)$ 이므로
$y = a(x-1)^2 - 1 = ax^2 - 2ax + a - 1$
$(3,\ 7)$ 을 대입하면
$7 = 9a - 6a + a - 1$
$a = 2$, $b = -4$, $c = 1$
$\therefore\ a + b + c = 2 + (-4) + 1 = -1$

29. 이차함수 $y = -2x^2 - 4ax + 8a$ 의 최댓값을 M 이라고 할 때, M 의 최솟값을 구하여라. (단, a 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

$y = -2x^2 - 4ax + 8a = -2(x+a)^2 + 2a^2 + 8a$

$\therefore M = 2a^2 + 8a = 2(a+2)^2 - 8$

따라서 M 의 최솟값은 -8 이다.

30. 차가 16 인 두 수가 있다. 두 수의 곱의 최솟값을 구하면?

① 4 ② 32 ③ 43 ④ −26 ⑤ −64

해설

차가 16 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(x+16)$ 이다.

$y = x(x+16) = x^2 + 16x = (x^2 + 16x + 64) - 64$

$y = (x+8)^2 - 64$

31. 가로의 길이가 5cm , 세로의 길이가 9cm 인 직사각형의 가로의 길이를 $x$cm 만큼 늘이고, 세로의 길이를 $x$cm 만큼 줄여서 새로운 직사각형을 만들었다. 새로운 직사각형의 넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 2.5 ④ 3 ⑤ 3.5

해설

새로운 사각형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= (5+x)(9-x) \\ &= -x^2+4x+45 \\ &= -(x-2)^2+49 \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 새로운 직사각형의 넓이의 최댓값 49cm^2 를 가진다.

32. 지면으로부터 초속 30m 로 던져 올린 물체의 t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = 30t - 5t^2$ 인 관계가 성립한다. 이 물체가 가장 높이 올라갔을 때의 높이는?

① 60m ② 55m ③ 50m ④ 45m ⑤ 40m

해설

$h = 30t - 5t^2$
$= -5(t^2 - 6t + 9) + 45$
$= -5(t - 3)^2 + 45$

33. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 $h\text{m}$ 라고 하면 $h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : $\frac{9}{2}\text{m}$

해설

$h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 에서 $h = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}\text{m}$ 이다.

34. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁고, $y = 2x^2$ 의 그래프보다 폭이 넓다고 할 때, 음수 a 의 값의 범위는?

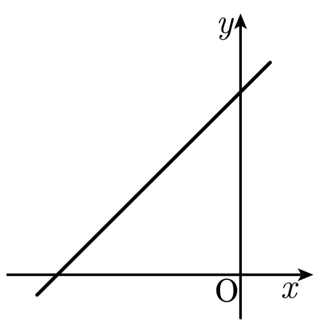
① $-\frac{3}{2} < a < 2$ ② $-\frac{3}{2} < a < -2$ ③ $\frac{3}{2} < a < 2$
④ $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ⑤ $-2 < a < \frac{3}{2}$

해설

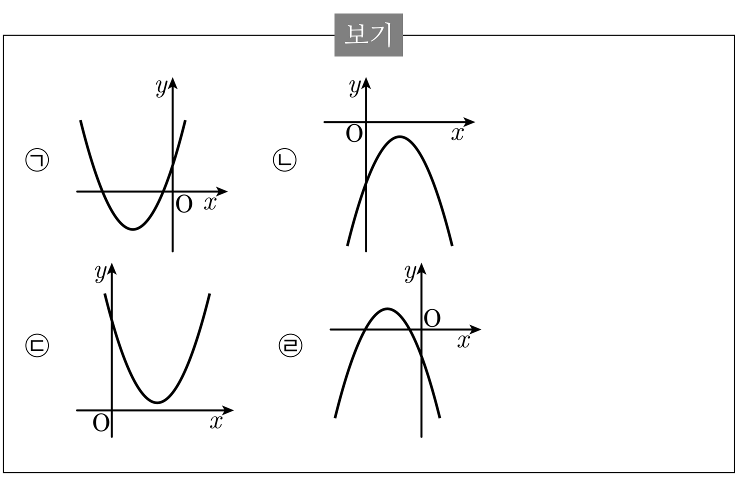
$\frac{3}{2} < |a| < 2$

$\frac{3}{2} < a < 2$ 또는 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이고, a 가 음수이므로 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이다.

35. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = -a(x-b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것을 보기에서 골라라.



보기



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

해설

그래프가 오른쪽 위를 향하므로 $a > 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다.
따라서 $y = -a(x-b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $b > 0$, $-a < 0$ 이므로
꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있는 그래프이다.

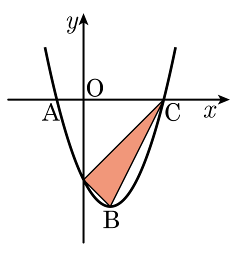
36. 이차함수 $y=-x^2+6x+4m-1$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 의 위에 있을 때, 상수 m 의 값은?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$y=-x^2+6x+4m-1$ 을 $y=a(x-p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면 $y=-(x-3)^2+8+4m$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 4m+8)$ 이다. 꼭짓점이 직선 $-2x+y+6=0$ 을 지나므로 $-6+4m+8+6=0$, $4m=-8$, $m=-2$ 이다.

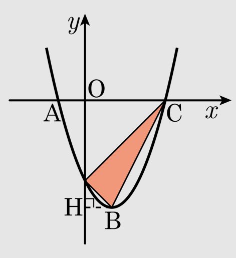
37. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 B, x 축과 만나는 한 점을 C 라 할 때, △ABC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설



i) A(0, −3)

ii) $y = x^2 - 2x - 3$
$= (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3$
$= (x - 1)^2 - 4$

∴ B(1, −4)

iii) $0 = x^2 - 2x - 3$
$= (x - 3)(x + 1)$

∴ $x = 3$ 또는 $x = -1$
양수인 x 절편이므로 C(3, 0) 이다.

iv) △ABC
$= □\mathrm{OHBC} - △\mathrm{OAC} - △\mathrm{AHB}$
$= \frac{1}{2} \times (3 + 1) \times 4 - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1$
$= 8 - \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 3$

38. 다음 조건을 모두 만족하는 이차함수의 식은?

> ㉠ 꼭짓점이 x 축 위에 있다.
>
> ㉡ 축의 방정식은 $x = 4$ 이다.
>
> ㉢ 점 $(6,\ -2)$ 를 지난다.

① $y = -2(x-4)^2$　② $y = 2(x-4)^2$

③ $y = \frac{1}{2}(x-4)^2$　④ $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2$

⑤ $y = -\frac{1}{2}(x+4)^2$

해설

꼭짓점이 x 축 위에 있으므로 꼭짓점의 y 좌표는 0 이다. 축의 방정식이 $x = 4$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표는 4이다. 따라서 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다. $y = a(x-4)^2$ 의 형태에서 점 $(6,\ -2)$ 를 지나므로 $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2$ 이다.

39. 둘레의 길이가 32 cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 8 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2 라 하면,

$y = x(16 - x)$

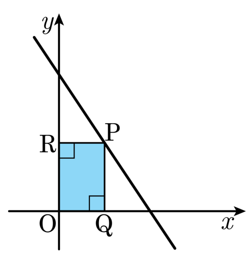
$= -x^2 + 16x$

$= -(x^2 - 16x)$

$= -(x - 8)^2 + 64$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

40. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

41. $y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 , y축의 방향으로 5 만큼 평행이동 한 이차함수의 그래프 위에 두 점 A(2, 8), B(a, b) 의 y 축에 대하여 대칭인 점을 각각 C , D 라 하고, 원점을 O 라 한다. △ABC 와 △BOD 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 일 때, a 의 값을 구하면? (단, $0 < a < 2$)

① $a = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2}$　② $a = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

③ $a = \dfrac{-1 + \sqrt{10}}{2}$　④ $a = \dfrac{-1 - \sqrt{10}}{2}$

⑤ $a = \dfrac{2}{3}$

해설

$y = 2(x-3)^2 - 5$ 의 그래프를 평행이동하면 $y = 2x^2$ 이다. 점 A(2, 8) 의 y 축에 대하여 대칭인 점 C 의 좌표는 $(-2, 8)$ 이고, 점 B(a, b) 의 y 축에 대하여 대칭인 점 D 의 좌표는 $(-a, b)$ 이다. 이 때, △ABC 의 $\overline{\mathrm{AC}}$ 를 밑변, 점 A, B 의 y 좌표의 차를 높이로 하면 $\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times (8 - b)$

이 식에 $b = 2a^2$ 을 대입하면 ($\because$ (a, b) 는 $y = 2x^2$ 위의 점)

$\frac{1}{2} \times 4 \times (8 - 2a^2) = 4(4 - a^2)$

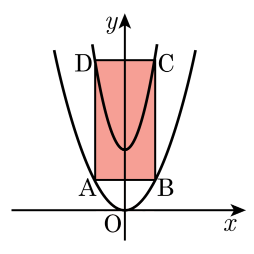
또한, $\triangle \mathrm{BOD} = \frac{1}{2} \times 2a \times 2a^2 = 2a^3$

△ABC 와 △BOD 의 넓이의 비가 $2 : a^2$ 이므로 $4(4-a^2) : 2a^3 = 2 : a^2$

$\therefore a^2(4 - a^2) = a^3, a^2 + a - 4 = 0$ 에서 $a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

여기서 $0 < a < 2$ 이므로 $a = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

42. 다음 그림에서 두 점 A, B 는 이차함수 $y = x^2$ 위의 점이고, 점 C, D 는 이차함수 $y = 3x^2+2$ 위의 점이다. 사각형 ABCD 에서 $2\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, 이 직사각형의 넓이를 구하여라. (단, 사각형의 각 변은 모두 좌표축과 평행하다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

점 B 의 x 좌표를 a라 하면

$\mathrm{A}(-a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(a,\ a^2)$, $\mathrm{C}(a,\ 3a^2+2)$, $\mathrm{D}(-a,\ 3a^2+2)$

$2\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$4a = 3a^2 + 2 - a^2 = 2a^2 + 2$

$(a-1)^2 = 0$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $\square\mathrm{ABCD} = 2 \times 4 = 8$ 이다.

43. 함수 $y = x^2 - q$, $y = -x^2 + q$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 21 일 때, q 의 값을 구하여라. (단, $q > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = 0$ 이므로 직사각형은 직선 $x = 0$ 에 대하여 대칭이다.
직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 $-t$, t 라 하면 가로의 길이는 $2t$,
세로의 길이는 $(-t^2 + q) - (t^2 - q) = -2t^2 + 2q$
이므로 직사각형의 둘레의 길이는
$2(-2t^2 + 2q + 2t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4q + 1$ 이다.
따라서 $t = \frac{1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $4q+1 = 21$ 이므로 $q = 5$ 이다.

44. 이차함수 $y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$ 의 최솟값을 k 이라 할 때, k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{11}{3}$

해설

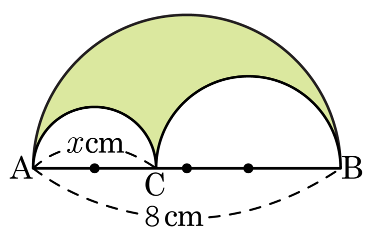
$y = x^2 - px + p^2 - 2p + 5$
$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + p^2 - 2p + 5$
$= \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$

이므로

$k = \frac{3}{4}p^2 - 2p + 5$
$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{4} \times \frac{16}{9} + 5$
$= \frac{3}{4}\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}$

따라서 $p = \frac{4}{3}$ 일 때, 최솟값 $\frac{11}{3}$ 을 갖는다.

45. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8-x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64-16x+x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{2x^2-16x+64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2-8x+16-16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x-4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.