

1. $a_n = 3 \cdot 2^{1-2n}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비 r 을 차례대로 구하면?

- ① $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ③ 3, 2 ④ 3, 4 ⑤ 3, $\frac{1}{2}$

해설

$$a_1 = 3 \cdot 2^{1-2} = \frac{3}{2}, \quad a_2 = 3 \cdot 2^{1-2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_1 = \frac{3}{2}, \quad r = \frac{1}{4}$$

2. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비 r 을 차례대로 구하면?

- ① $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{6}, 3$ ③ $\frac{9}{2}, 9$ ④ $\frac{1}{6}, 9$ ⑤ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

해설

$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}, \quad \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$$

$$\therefore a_1 = \frac{9}{2}, \quad r = 9$$

3. 다음 등비수열에서 ()안에 알맞은 수는?

32, -8, 2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, ()

- ① $-\frac{1}{16}$
- ② $-\frac{1}{18}$
- ③ $-\frac{1}{24}$
- ④ $-\frac{1}{32}$
- ⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32}$$

4. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

- ① 61 ② 122 ③ 244 ④ 361 ⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ 에서}$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

5. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{1} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

6. 등비증항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, 안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$-2, \square, -8, \square, \square, 64, \dots$

- ① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b 라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$
따라서 $b = 4$ 이고 공비는 -2 인 수열이 되므로 구하는 수열은
 $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$
 $\therefore 4 + 16 - 32 = -12$

7. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

8. 세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

세 수 a , $a+2$, $2a+1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a+2)^2 = a(2a+1)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a+1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$

이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

10. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

- ㉠

1, 4, 9, 16, 25,...
- ㉡

3, 9, 27, 81, 243,...
- ㉢

9, 99, 999, 9999, 99999,...
- ㉣

2, 3, 4, 9, 8, 27
- ㉤

$\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

- ①

㉠
- ②

㉠, ㉡
- ③

㉡, ㉣
- ④

㉡, ㉤
- ⑤

㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

11. 다섯 개의 수 $10, a, b, c, 90$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, $10, d, e, f, 90$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, $b+e$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

b 는 10과 90의 등차중항이므로

$$b = \frac{10 + 90}{2} = 50$$

e 는 10과 90의 등비중항이므로

$$e = \sqrt{10 \times 90} = 30 \quad \therefore b + e = 80$$

12. 세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?(단, $a > 0, b > 0$)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 12 \cdots \textcircled{1}$$

세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 4b \cdots \textcircled{2}$$

①에서 $4b = 2a + 24$ 이므로 이것을 ②에 대입하면

$$a^2 = 2a + 24$$

$$a^2 - 2a - 24 = 0, (a - 6)(a + 4) = 0$$

따라서 $a = 6$ ($\because a > 0$)

이것을 ①에 대입하면

$$2b = 6 + 12 \quad \therefore b = 9$$

$$a + b = 15$$

13. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 2n + 4$ 로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.
 - ② 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.
 - ③ 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이다.
 - ④ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.
 - ⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 -2인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n + 4 - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\} \\ &= 2n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = S_1 = 3$ 이므로 이 수열의 첫째항은 3이고, 둘째항은 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

14. 첫째항부터 제3항까지의 합이 7, 제4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498

② 502

③ 511

④ 512

⑤ 524

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7 \dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 63 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 7(r^3 + 1) = 63$$

$$r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r = 2$$

$$r = 2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a(2^3 - 1) = 7 \quad \therefore a = 1$$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 512 - 1 = 511$$

15. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

㉠ 210 ㉡ 220 ㉢ 230 ㉣ 240 ㉤ 250

해설

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$S_5 = 30$, $S_{10} = 90$ 이므로

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = 90 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $30(r^5 + 1) = 90 \therefore r^5 = 2$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{a(r^{15} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^{10} + r^5 + 1)}{r - 1} \\ &= 30(2^2 + 2 + 1) = 210 \end{aligned}$$

16. 등비수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $|S_n - 1| < 0.001$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$
$$\therefore |S_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$
$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

1000 < 2ⁿ 인 n의 최솟값을 구하면 된다.
그런데 2¹⁰ = 1024, 2⁹ = 512 이므로 2ⁿ > 1000 인 n의 최솟값은 10

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_n = 2n, b_n = 5n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$ 이라 한다. 이때, C_{41} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 412

해설

$$a_6 = b_2 = 12,$$

$$a_{11} = b_4 = 22,$$

$$a_{16} = b_6 = 32, \dots \text{이므로}$$

수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 10인 등차수열이다.

$$\therefore c_{41} = 12 + 40 \cdot 10 = 412$$

18. a, b, c 는 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이고, 수열 $0.a, 0.0b, 0.00c, \dots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

- ① $0.00\dot{1}\dot{5}$
- ② $0.00\dot{1}\dot{6}$
- ③ $0.001\dot{6}$
- ④ $0.001\dot{7}$
- ⑤ $0.00\dot{1}\dot{7}$

해설

$0.\dot{a} = \frac{a}{9}, 0.0\dot{b} = \frac{b}{90}, 0.00\dot{c} = \frac{c}{900}$ 이므로

$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900}$ 에서 $b^2 = ac$

즉, a, b, c 는 이 순서로 등비수열을 이루고 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이므로 $a = 2, b = 4, c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9}, \frac{4}{90}, \frac{8}{900}, \dots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$

19. 수열 1, 11, 111, 1111, ... 에서 제100 항은?

- ① $\frac{10^{200}-1}{9}$ ② $\frac{10^{100}-1}{9}$ ③ $10^{100}+1$
④ $\frac{10^{200}-1}{9}$ ⑤ $10^{200}+1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10 + 1$$

$$a_3 = 10^2 + 10 + 1$$

$\vdots$

$$a_n = 10^{(n-1)} + \cdots + 10^2 + 10 + 1$$

$$= \frac{1\{10^n - 1\}}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{10^{100} - 1}{9}$$

20. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

- ① 127 ② 136 ③ 148 ④ 156 ⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$= 96r^2 = 24$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$