

1. $a_n = 3 \cdot 2^{1-2n}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비 r 을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$

② $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

③ 3, 2

④ 3, 4

⑤ 3, $\frac{1}{2}$

해설

$$a_1 = 3 \cdot 2^{1-2} = \frac{3}{2}, \quad a_2 = 3 \cdot 2^{1-2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_1 = \frac{3}{2}, \quad r = \frac{1}{4}$$

2. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^{2n+1}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비 r 을 차례대로 구하면?

① $\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$

② $\frac{1}{6}, 3$

③ $\frac{9}{2}, 9$

④ $\frac{1}{6}, 9$

⑤ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

해설

$$a_1 = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = \frac{9}{2}, \quad \frac{1}{6} \cdot 3^5 = \frac{81}{2}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{81}{2}}{\frac{9}{2}} = 9$$

$$\therefore a_1 = \frac{9}{2}, \quad r = 9$$

3. 다음 등비수열에서 ()안에 알맞은 수는?

$$32, -8, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, ()$$

① $-\frac{1}{16}$

② $-\frac{1}{18}$

③ $-\frac{1}{24}$

④ $-\frac{1}{32}$

⑤ $-\frac{1}{64}$

해설

공비가 $-\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$\frac{1}{8} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{32}$$

4. 첫째항이 1, 공비가 -3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

①

61

② 122

③ 244

④ 361

⑤ 722

해설

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{에서}$$

$$S_5 = \frac{1 \cdot \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61$$

5. 제 3항이 6이고 제 7항이 96인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_3 = ar^2 = 6 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 = ar^6 = 96 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{에서 } r^4 = 16$$

$$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } a = \frac{3}{2}$$

첫째항은 $\frac{3}{2}$, 공비는 2이므로 곱은 3

6. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, 안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$$-2, \square, -8, \square, \square, 64, \dots$$

① -11

② -12

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b 라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8)$, $b^2 = 16$

따라서 $b = 4$ 이고 공비는 -2 인 수열이 되므로 구하는 수열은
 $-2, 4, -8, 16, -32, 64, \dots$

$$\therefore 4 + 16 - 32 = -12$$

7. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

8. 세 수 a , $a + 2$, $2a + 1$ 이 이 순서로 등비수열을 이룰 때, a 의 값은?
(단, $a > 0$)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

세 수 a , $a + 2$, $2a + 1$ 이 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$(a + 2)^2 = a(2a + 1)$$

$$a^2 - 3a - 4 = 0$$

$$(a + 1)(a - 4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

9. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n + 2$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$S_{10} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$, $S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9$
이므로

$$\begin{aligned} a_{10} &= S_{10} - S_9 \\ &= (10^2 - 3 \cdot 10 + 2) - (9^2 - 3 \cdot 9 + 2) \\ &= (10^2 - 9^2) - 3(10 - 9) \\ &= 16 \end{aligned}$$

10. 다음 중 등비수열인 것을 모두 고른 것은?

㉠ 1, 4, 9, 16, 25, ...

㉡ 3, 9, 27, 81, 243, ...

㉢ 9, 99, 999, 9999, 99999, ...

㉣ 2, 3, 4, 9, 8, 27

㉤ $\frac{4}{9}, \frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \dots$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉣

④ ㉡, ㉤

⑤ ㉣, ㉤

해설

㉡은 공비가 3인 등비수열이다.

㉤은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

11. 다섯 개의 수 $10, a, b, c, 90$ 은 이 순서대로 등차수열을 이루고, $10, d, e, f, 90$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이때, $b+e$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 80

해설

b 는 10과 90의 등차중항이므로

$$b = \frac{10 + 90}{2} = 50$$

e 는 10과 90의 등비중항이므로

$$e = \sqrt{10 \times 90} = 30 \quad \therefore b + e = 80$$

12. 세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고, 세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $a + b$ 의 값은?(단, $a > 0, b > 0$)

① 11

② 12

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

세 수 $a, b, 12$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 12 \cdots \textcircled{㉠}$$

세 수 $4, a, b$ 가 이 순서로 등비수열을 이루므로

$$a^2 = 4b \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $4b = 2a + 24$ 이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$$a^2 = 2a + 24$$

$$a^2 - 2a - 24 = 0, (a - 6)(a + 4) = 0$$

따라서 $a = 6$ ($\because a > 0$)

이것을 ㉠에 대입하면

$$2b = 6 + 12 \quad \therefore b = 9$$

$$a + b = 15$$

13. 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 2n + 4$ 로 나타내어지는 수열에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① 첫째항이 3, 공차가 2인 등차수열이다.
- ② 첫째항이 4, 공차가 2인 등차수열이다.
- ③ 첫째항이 3, 공차가 -2인 등차수열이다.
- ④ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.
- ⑤ 첫째항이 3, 둘째항이 1이며, 둘째항부터는 공차가 -2인 등차수열이다.

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n + 4 - \{(n-1)^2 - 2(n-1) + 4\} \\ &= 2n - 3 \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

그런데 $a_1 = S_1 = 3$ 이므로 이 수열의 첫째항은 3이고, 둘째항은 1이며, 둘째항부터는 공차가 2인 등차수열이다.

14. 첫째항부터 제3 항까지의 합이 7, 제4 항부터 제6 항까지의 합이 56 인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9 항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498

② 502

③ 511

④ 512

⑤ 524

해설

첫째항을 a , 공비를 r 이라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_3 = \frac{a(r^3 - 1)}{r - 1} = 7 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_6 = \frac{a(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^3 - 1)(r^3 + 1)}{r - 1} = 63 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $7(r^3 + 1) = 63$

$$r^3 + 1 = 9 \quad \therefore r = 2$$

$r = 2$ 를 ㉠에 대입하면 $a(2^3 - 1) = 7 \quad \therefore a = 1$

$$S_9 = \frac{1 \cdot (2^9 - 1)}{2 - 1} = 512 - 1 = 511$$

15. 첫째항부터 제5항까지의 합이 30, 첫째항부터 제10항까지의 합이 90인 등비수열의 첫째항부터 제15항까지의 합은?

- ① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

해설

첫째항이 a , 공비가 r 인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_5 = 30, S_{10} = 90 \text{ 이므로}$$

$$S_5 = \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉠}}$$

$$S_{10} = \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = 90 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}} \text{을 } \textcircled{\text{㉡}} \text{에 대입하면 } 30(r^5 + 1) = 90 \therefore r^5 = 2$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합 S_{15} 는

$$\begin{aligned} S_{15} &= \frac{a(r^{15} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^5 - 1)(r^{10} + r^5 + 1)}{r - 1} \\ &= 30(2^2 + 2 + 1) = 210 \end{aligned}$$

16. 등비수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $|S_n - 1| < 0.001$ 을 만족하는 자연수 n 의 최솟값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$\therefore |S_n - 1| = \left| 1 - \frac{1}{2^n} - 1 \right| = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} < 0.001 = \frac{1}{1000}$$

$1000 < 2^n$ 인 n 의 최솟값을 구하면 된다.

그런데 $2^{10} = 1024$, $2^9 = 512$ 이므로 $2^n > 1000$ 인 n 의 최솟값은 10

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_n = 2n, \quad b_n = 5n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 에서 공통인 항을 작은 것부터 순서대로 나열한 수열을 $\{c_n\}$ 이라 한다. 이때, c_{41} 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 412

해설

$$a_6 = b_2 = 12,$$

$$a_{11} = b_4 = 22,$$

$$a_{16} = b_6 = 32, \dots \text{이므로}$$

수열 $\{c_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 10인 등차수열이다.

$$\therefore c_{41} = 12 + 40 \cdot 10 = 412$$

18. a, b, c 는 $1 < a < b < c < 9$ 인 정수이고, 수열 $0.a, 0.0b, 0.00c, \dots$ 가 등비수열일 때, 이 수열의 제 4항은?

① $0.001\dot{5}$

② $0.001\dot{6}$

③ $0.001\dot{6}$

④ $0.001\dot{7}$

⑤ $0.001\dot{7}$

해설

$$0.\dot{a} = \frac{a}{9}, 0.0\dot{b} = \frac{b}{90}, 0.00\dot{c} = \frac{c}{900} \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{b}{90}\right)^2 = \frac{a}{9} \times \frac{c}{900} \text{ 에서 } b^2 = ac$$

즉, a, b, c 는 이 순서로 등비수열을 이루고

$1 < a < b < c < 9$ 인 정수이므로 $a = 2, b = 4, c = 8$ 이다.

따라서 이 수열은 $\frac{2}{9}, \frac{4}{90}, \frac{8}{900}, \dots$ 이므로

첫째항이 $\frac{2}{9}$ 이고, 공비가 $\frac{2}{10}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore a_4 = \frac{16}{9000} = 0.001\dot{7}$$

19. 수열 1, 11, 111, 1111, ... 에서 제100항은?

① $\frac{10^{200} - 1}{9}$

② $\frac{10^{100} - 1}{9}$

③ $10^{100} + 1$

④ $\frac{10^{200} - 1}{9}$

⑤ $10^{200} + 1$

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 10 + 1$$

$$a_3 = 10^2 + 10 + 1$$

$$\vdots$$

$$a_n = 10^{(n-1)} + \cdots + 10^2 + 10 + 1$$

$$= \frac{1 \{10^n - 1\}}{10 - 1} = \frac{1}{9}(10^n - 1)$$

$$\therefore a_{100} = \frac{10^{100} - 1}{9}$$

20. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 = 96$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120$ 일 때, 첫째항부터 제 7항까지의 합은?

① 127

② 136

③ 148

④ 156

⑤ 164

해설

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 = 96 \text{에서 } a + ar = 96 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 120 \text{에서 } 96 + a_3 + a_4 = 120$$

즉, $a_3 + a_4 = 24$ 이므로

$$a_3 + a_4 = ar^2 + ar^3 = r^2(a + ar)$$

$$= 96r^2 = 24$$

$$r^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{3}{2}a = 96 \quad \therefore a = 64$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{64 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 128 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^7 \right\} = 128 - 1 = 127$$