1. 좌표평면 위의 세 점 $A(2,\ 0)$, $B(3,\ a)$, $C(4,\ 2)$에 대하여 $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(3-2)^2+(a-0)^2=(4-3)^2+(2-a)^2$

$1+a^2=1+4-4a+a^2$

$4a=4 \qquad \therefore a=1$

2. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$ ② $(2, 4)$ ③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$ ⑤ $(1, -5)$

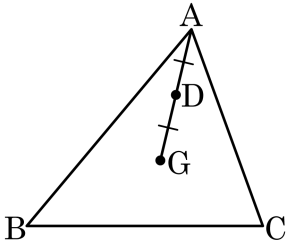
해설

D (a, b)라 두면 평행사변형의 성질로부터
대각선 $\overline{\mathrm{AD}}$의 중점과 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$\therefore$ $a = 4$, $b = 2$

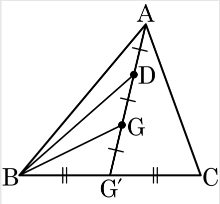
3. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 점 G는 $\triangle ABC$의 무게중심이고 점 D는 $\overline{AG}$의 중점일 때, $\dfrac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만난 점을 G′이라고 하면



$\overline{BG'} = \overline{G'C}$에서

$\triangle ABG' = \frac{1}{2}\triangle ABC$

$\overline{DG} = \frac{1}{3}\overline{AG'}$이므로

$$\begin{aligned}\triangle DBG &= \frac{1}{3}\triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle ABC \\ &= \frac{1}{6}\triangle ABC\end{aligned}$$

$\therefore \dfrac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \dfrac{1}{6}$

4. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

5. 세 점 O$(0,0)$, A$(2,4)$, B$(6,2)$와 선분 AB 위의 점 P(a,b)에 대하여 삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAP의 넓이의 2배일 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle$OAB와 $\triangle$OAP의 높이가 같으므로

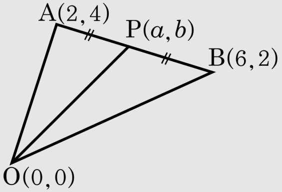
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$이려면

P는 선분 AB의 중점이어야 한다.

이 때, P$\left(\dfrac{2+6}{2}, \dfrac{4+2}{2}\right)$

즉 P$(4,3)$이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



6. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E 까지의 거리 $f(x)$는
$f(x) = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-3| + |x-5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x-1-x-x+1-x+3-x+5 = -5x+8$
(ii) $-1 \le x < 0$, $f(x) = x+1-x-x+1-x+3-x+5$
$= -3x+10$
(iii) $0 \le x < 1$, $f(x) = x+1+x-x+1-x+3-x+5 = -x+10$
(iv) $1 \le x < 3$, $f(x) = x+1+x+x-1-x+3-x+5 = x+8$
(v) $3 \le x < 5$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3-x+5 = 3x+2$
(vi) $5 \le x$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3+x-5 = 5x-8$
이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x=1$ 인 경우 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$\therefore\ f(1) = |1+1| + |1| + |1-1| + |1-3| + |1-5| = 9$

7. 두 점 $\mathrm{A}(-2,-3)$, $\mathrm{B}(-5,4)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0,-2)$ ② $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ ③ $(0,1)$

④ $(0,2)$ ⑤ $\left(0,\frac{14}{3}\right)$

해설

P의 좌표를 $(0,\alpha)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$이므로

$\sqrt{(0-(-2))^2+(\alpha-(-3))^2}$

$=\sqrt{(0-(-5))^2+(\alpha-4)^2}$, $\alpha=2$

$\therefore\ \mathrm{P}=(0,2)$

8. 두 점 $(1,-3)$, $(3,2)$로부터 거리가 같고, 직선 $y=2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ ⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y=2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$로 놓으면

$\sqrt{(1-a)^2+(-3-2a)^2}$

$=\sqrt{(3-a)^2+(2-2a)^2}$

$a^2-2a+1+4a^2+12a+9=a^2-6a+9+4a^2-8a+4$

$10a+10=-14a+13$

$\therefore\ 24a=3$

$\therefore\ a=\frac{1}{8},\ 2a=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

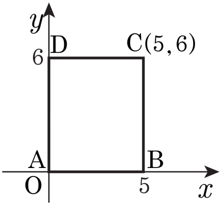
9. 세 점 $\mathrm{A}(2,1), \mathrm{B}(-4,3), \mathrm{C}(-1,-3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 외심의 좌표를 (a,b) 라고 할때, $a+b$를 구하면?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ -1 ⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O라 하면
$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$ 이다.
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2+(b-3)^3}$ 에서 $3a-b = -5 \cdots$ ㉠
$\sqrt{(a-2)^2+(b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2+(b+3)^3}$ 에서 $6a+8b = -5 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면
$a = -\dfrac{3}{2}$ $b = \dfrac{1}{2}$
$\therefore$ $a+b = -1$

10. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,6)$, $D(0,6)$로 이루어진 $\square ABCD$가 있다. $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$를 최소로 하는 점 P의 좌표는?



① $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ③ $(0,3)$

④ $(5,0)$ ⑤ $(0,6)$

해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD 의 교점을

P 라 하고 임의의 점 P′ 을 잡으면

$\overline{P'A}+\overline{P'C} \geq \overline{AC}=\overline{PA}+\overline{PC}$

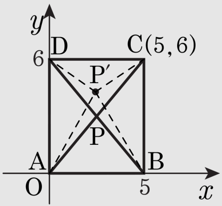
$\overline{P'B}+\overline{P'D} \geq \overline{BD}=\overline{PB}+\overline{PD}$

$\therefore \overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}+\overline{P'D}$

$\geq \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$

즉, $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$를 최소로 하는

점 P는 $\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 교점 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$이다.



11. 삼각형 ABC 의 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 P(1, 3), Q(5, 1), R(4, 4) 일 때, 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

① $(3, 2)$ ② $(3, 3)$ ③ $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

④ $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$ ⑤ $\left(\frac{11}{3}, 2\right)$

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 이라 하면

$\overline{AB}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점이 P(1, 3) 이므로

$$\frac{2x_2 + x_1}{2+1} = 1,\ \frac{2y_2 + y_1}{2+1} = 3$$

$\therefore 2x_2 + x_1 = 3,\ 2y_2 + y_1 = 9 \qquad \cdots ㉠$

$\overline{BC}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점이 Q(5, −1) 이므로

$$\frac{2x_3 + x_2}{2+1} = 5,\ \frac{2y_3 + y_2}{2+1} = -1$$

$\therefore 2x_3 + x_2 = 15,\ 2y_2 + y_1 = -3 \qquad \cdots ㉡$

$\overline{CA}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점이 R(4, 4) 이므로

$$\frac{2x_1 + x_3}{2+1} = 4,\ \frac{2y_1 + y_3}{2+1} = 4$$

$\therefore 2x_1 + x_3 = 12,\ 2y_1 + y_3 = 12 \qquad \cdots ㉢$

㉠, ㉡, ㉢에서

$3(x_1 + x_2 + x_3) = 30,\ 3(y_1 + y_2 + y_3) = 18$

$\therefore (x_1 + x_2 + x_3) = 10,\ (y_1 + y_2 + y_3) = 6$

따라서 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{10}{3},\ \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 2$ 이므로 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

12. 두 정점 A(1, 2), B(−3, 0)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$ ② $y = 2x - 1$ ③ $y = -2x + 1$
④ $y = -2x - 1$ ⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$ 이므로
$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$
양변을 제곱해서 정리하면
$-8x - 4y - 4 = 0,\ -4y = 8x + 4$
$\therefore\ y = -2x - 1$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고
$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점$(-1,\ 1)$ 을 지난다.
$\therefore\ y - 1 = -2(x + 1)$
$\therefore\ y = -2x - 1$

13. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$

$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$

$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서

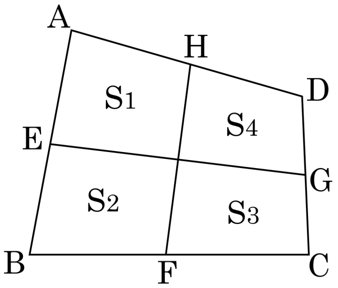
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$

$\therefore\ a = 2$

따라서 모든 a 의 값의 합은

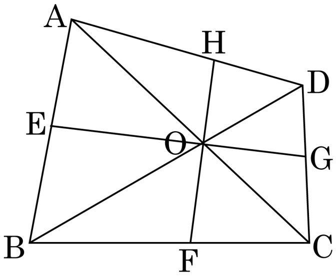
$3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$

14. 다음 그림과 같이 내각의 크기가 모두 180° 보다 작은 사각형 ABCD 가 있다.



네 변 AB, BC, CD, DA 의 중점을 각각 E, F, G, H 라 하고, $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 에 의하여 나누어진 사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 라 할 때, 다음은 S_1, S_2, S_3, S_4 사이의 관계를 찾는 과정이다.

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면,



점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로, $\triangle OAE = \boxed{(가)}$
또한, 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로, $\triangle OBF = \boxed{(나)}$
따라서 $S_2 = \triangle OAE + \boxed{(나)}$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG \therefore \boxed{(다)}$

위의 과정에서 (가), (나), (다) 에 알맞은 것은?

① (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

② (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

③ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

④ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

⑤ (가) $\triangle OCG$ (나) $\triangle ODH$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

해설

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면
점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로
$\triangle OAE = \triangle OBE$
또한 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로
$\triangle OBF = \triangle OCF$
$\therefore\ S_2 = \triangle OAE + \triangle OCF$
같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$
$\therefore\ S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

15. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$

② $3x+4y-6=0$

③ $4x-3y-6=0$

④ $3x-4y+6=0$

⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a,b)$ 라고 하면

$3a-4b-11=0 \quad \cdots ①$

$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x,y)$ 라고 하면

$$x=\frac{3+a}{2},\ y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2 \quad \cdots ②$

②를 ①에 대입하면

$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$

$\therefore\ 3x-4y-6=0$

16. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심 ② 내심 ③ 수심

④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

$A(x_1,\ y_1),\quad B(x_2,\ y_2),\quad C(x_3,\ y_3)$

송전소의 위치를 $D(\ x,\ y)$, 비용을 P 라고 하면

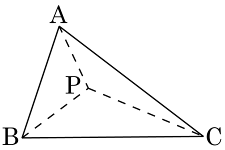
$$P = k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}\right\}+k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

$x=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

17. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$가 되었다고 한다. 이 때, 선분 BC 의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면

$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

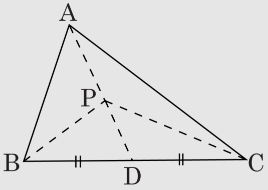
$\therefore \overline{PD} = 2$

$\triangle PBC$에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$$

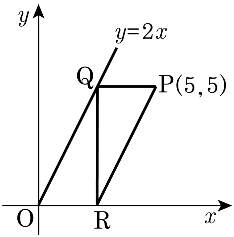
$$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13},\ \overline{BC} = 2\cdot\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$



18. 다음 그림에서 점 $\mathrm{P}(5,5)$와 직선 $y=2x$ 위의 점 Q, x축 위의 점 R에 대하여 $\triangle\mathrm{PQR}$의 둘레의 길이의 최솟값은?

① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$
④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2



해설

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}$의 최솟값은 P를 $y=2x$에 대해 대칭시킨 P′와 x축에 대해 대칭이동시킨 $\mathrm{P''}(5,-5)$ 사이 거리와 같다.

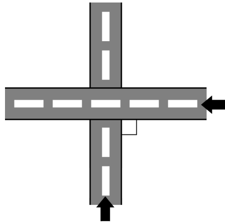
$\mathrm{P'}=(a,b)$라하면 $\overline{\mathrm{PP'}}$은 $y=2x$에 수직이고

$\overline{\mathrm{PP'}}$의 중점은 $y=2x$ 위에 있다

$\therefore\ \mathrm{P'}=(1,\ 7)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{PR}}\geq\overline{\mathrm{P'P''}}=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$

19. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6 km, B는 남쪽으로 4 km지점에 있다. 지금 A는 시속 4 km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2 km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후
④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0) , B(0, −4) 이고
t 시간 후의 A, B 의 좌표는
$A(6-4t,\ 0),\ B(0, -4+2t)$ 이다.
따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$s = \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2}$$
$$= \sqrt{20t^2 - 64t + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52}$$
$$= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$$ 이므로

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

20. 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5,\ 4)$, 변 AB 의 중점의 좌표가 $(-1,\ 3)$, 무게중심의 좌표가 $(1,\ 2)$ 일 때, 변 BC 의 중점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하면?

① -3　　② 0　　③ 2　　④ 5　　⑤ 7

해설

점 $\mathrm{B}(X, Y)$ 라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 : $\left(\dfrac{X+5}{2}, \dfrac{Y+4}{2}\right) = (-1, 3)$

$\therefore\ X = -7,\ Y = 2$

이제 점 $\mathrm{C}(x, y)$ 라 하면,

무게중심은 $\left(\dfrac{5+(-7)+x}{3}, \dfrac{4+2+y}{3}\right) = (1, 2)$

$\therefore\ x = 5,\ y = 0$

$\therefore$ 변 BC 의 중점은

$\left(\dfrac{-7+5}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = (-1, 1)$