

1. 좌표평면 위의 세 점 $A(2, 0)$, $B(3, a)$, $C(4, 2)$ 에 대하여 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, a 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(3-2)^2 + (a-0)^2 = (4-3)^2 + (2-a)^2$$

$$1 + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2$$

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

2. 세 점 A $(-1, 1)$, B $(-3, -2)$, C $(2, -1)$ 에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 D의 좌표를 정하면?

① $(4, 2)$

② $(2, 4)$

③ $(3, 5)$

④ $(5, 3)$

⑤ $(1, -5)$

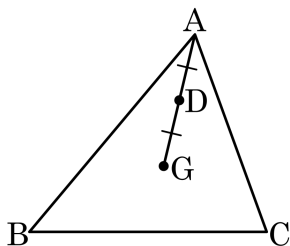
해설

D (a, b) 라 두면 평행사변형의 성질로부터 대각선 $\overline{AD}$ 의 중점과 $\overline{BC}$ 의 중점은 일치한다.

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 0\right) = \left(\frac{a-3}{2}, \frac{b-2}{2}\right)$$

$$\therefore a = 4, b = 2$$

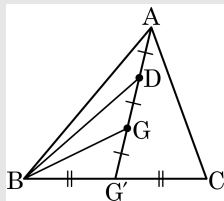
3. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 에서 점 G는 $\triangle ABC$ 의 무게중심이고 점 D는 $\overline{AG}$ 의 중점일 때, $\frac{\triangle DBG}{\triangle ABC}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$\overline{AG}$ 의 연장선이 $\overline{BC}$ 와 만난 점을 G' 이라고 하면



$$\overline{BG'} = \overline{G'C} \text{에서}$$

$$\triangle ABG' = \frac{1}{2} \triangle ABC$$

$$\overline{DG} = \frac{1}{3} \overline{AG'} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \triangle DBG &= \frac{1}{3} \triangle ABG' \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{6} \triangle ABC \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\triangle DBG}{\triangle ABC} = \frac{1}{6}$$

4. 세 점 A (1, 5), B (-4, -7), C (5, 2)가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 점 D의 좌표를 구하면?

- ① (0, 0) ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$$\overline{AB} = 13, \overline{AC} = 5$$

$$\text{따라서 } \overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$$

D는 B, C를 13 : 5로 내분한 점

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

5. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의
넓이가 같으므로

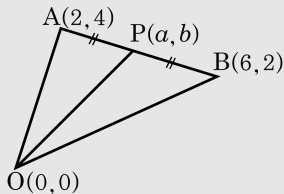
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면

P 는 선분 AB 의 중점이어야 한다.

이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$

즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$

$\therefore a+b=7$



6. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

① 8

② 9

③ 10

④ 11

⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면

점 P에서 정점 A, B, C, D, E까지의 거리 $f(x)$ 는

$$f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$$

$$(i) \ x < -1, f(x) = -x - 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -5x + 8$$

$$(ii) \ -1 \leq x < 0, f(x) = x + 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -3x + 10$$

$$(iii) \ 0 \leq x < 1, f(x) = x + 1 + x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -x + 10$$

$$(iv) \ 1 \leq x < 3, f(x) = x + 1 + x + x - 1 - x + 3 - x + 5 = x + 8$$

$$(v) \ 3 \leq x < 5, f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 - x + 5 = 3x + 2$$

$$(vi) \ 5 \leq x, f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 + x - 5 = 5x - 8$$

이므로

(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.

$$\therefore f(1) = |1 + 1| + |1| + |1 - 1| + |1 - 3| + |1 - 5| = 9$$

7. 두 점 $A(-2, -3)$, $B(-5, 4)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0, -2)$

② $(0, \frac{1}{2})$

③ $(0, 1)$

④ $(0, 2)$

⑤ $(0, \frac{14}{3})$

해설

P 의 좌표를 $(0, \alpha)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0 - (-2))^2 + (\alpha - (-3))^2} \\ &= \sqrt{(0 - (-5))^2 + (\alpha - 4)^2}, \alpha = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore P = (0, 2)$$

8. 두 점 $(1, -3)$, $(3, 2)$ 로부터 거리가 같고, 직선 $y = 2x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

② $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right)$

③ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$

⑤ $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$

해설

$y = 2x$ 위에 있으므로 $(a, 2a)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-a)^2 + (-3-2a)^2} \\ &= \sqrt{(3-a)^2 + (2-2a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 12a + 9 &= a^2 - 6a + 9 + 4a^2 - 8a + 4 \\ 10a + 10 &= -14a + 13 \end{aligned}$$

$$\therefore 24a = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{8}, 2a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

9. 세 점 $A(2, 1)$, $B(-4, 3)$, $C(-1, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 외심의 좌표를 (a, b) 라고 할때, $a + b$ 를 구하면?

① -2

② 3

③ 4

④ -1

⑤ -3

해설

외심은 외접원의 중심이므로 외심을 O 라 하면

$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ 이다.

$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+4)^2 + (b-3)^2} \text{에서 } 3a - b = -5 \dots \textcircled{㉠}$$

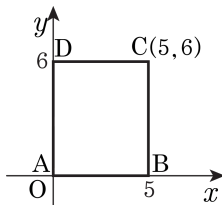
$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+3)^2} \text{에서 } 6a + 8b = -5 \dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡를 연립하면

$$a = -\frac{3}{2} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = -1$$

10. 다음 그림과 같이 좌표평면에 네 점 $A(0,0)$, $B(5,0)$, $C(5,6)$, $D(0,6)$ 로 이루어진 $\square ABCD$ 가 있다. $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는 점 P 의 좌표는?



- ① $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ ② $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ ③ $(0, 3)$
 ④ $(5, 0)$ ⑤ $(0, 6)$

해설

다음 그림에서 두 대각선 AC, BD 의 교점을

P 라 하고 임의의 점 P' 을 잡으면

$$\overline{P'A} + \overline{P'C} \geq \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{PC}$$

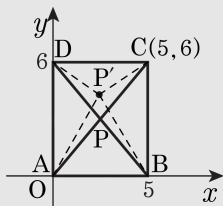
$$\overline{P'B} + \overline{P'D} \geq \overline{BD} = \overline{PB} + \overline{PD}$$

$$\therefore \overline{P'A} + \overline{P'B} + \overline{P'C} + \overline{P'D}$$

$$\geq \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$$

즉, $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} + \overline{PD}$ 를 최소로 하는

점 P 는 $\overline{AC}$ 와 $\overline{BD}$ 의 교점 $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ 이다.



11. 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 2 : 1로 내분하는 점이 각각 P(1, 3), Q(5, 1), R(4, 4) 일 때, 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는?

① (3, 2)

② (3, 3)

③ $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

④ $\left(\frac{10}{3}, 3\right)$

⑤ $\left(\frac{11}{3}, 2\right)$

해설

A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)이라 하면
 $\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이 P(1, 3)이므로

$$\frac{2x_2 + x_1}{2 + 1} = 1, \frac{2y_2 + y_1}{2 + 1} = 3$$

$$\therefore 2x_2 + x_1 = 3, 2y_2 + y_1 = 9 \quad \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

$\overline{BC}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이 Q(5, -1)이므로

$$\frac{2x_3 + x_2}{2 + 1} = 5, \frac{2y_3 + y_2}{2 + 1} = -1$$

$$\therefore 2x_3 + x_2 = 15, 2y_3 + y_2 = -3 \quad \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$\overline{CA}$ 를 2 : 1로 내분하는 점이 R(4, 4)이므로

$$\frac{2x_1 + x_3}{2 + 1} = 4, \frac{2y_1 + y_3}{2 + 1} = 4$$

$$\therefore 2x_1 + x_3 = 12, 2y_1 + y_3 = 12 \quad \cdots \textcircled{\text{㉢}}$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$3(x_1 + x_2 + x_3) = 30, 3(y_1 + y_2 + y_3) = 18$$

$$\therefore (x_1 + x_2 + x_3) = 10, (y_1 + y_2 + y_3) = 6$$

따라서 $\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{10}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 2$ 이므로 삼각형

ABC의 무게중심의 좌표는 $\left(\frac{10}{3}, 2\right)$

12. 두 정점 A(1, 2), B(-3, 0)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y = 2x + 1$

② $y = 2x - 1$

③ $y = -2x + 1$

④ $y = -2x - 1$

⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱해서 정리하면

$$-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분선이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.

$$\therefore y - 1 = -2(x + 1)$$

$$\therefore y = -2x - 1$$

13. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0)에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$

$$\therefore a = \pm 3$$

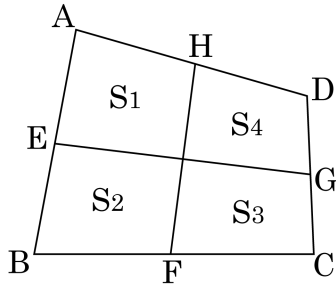
3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서
 $a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$

$$\therefore a = 2$$

따라서 모든 a의 값의 합은

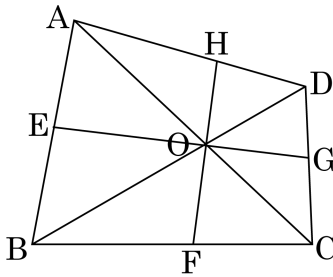
$$3 + \sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} + 3 + (-3) + 2 = 8$$

14. 다음 그림과 같이 내각의 크기가 모두 180° 보다 작은 사각형 ABCD 가 있다.



네 변 AB, BC, CD, DA 의 중점을 각각 E, F, G, H 라 하고, $\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 에 의하여 나누어진 사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3, S_4 라 할 때, 다음은 S_1, S_2, S_3, S_4 사이의 관계를 찾는 과정이다.

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면,



점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로, $\triangle OAE =$ (가)
 또한, 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로, $\triangle OBF =$ (나)
 따라서 $S_2 = \triangle OAE +$ (나)
 같은 방법으로 $S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG \therefore$ (다)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
 ② (가) $\triangle OBE$ (나) $\triangle OCF$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
 ③ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$
 ④ (가) $\triangle OAH$ (나) $\triangle OBE$ (다) $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
 ⑤ (가) $\triangle OCG$ (나) $\triangle ODH$ (다) $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$

해설

$\overline{EG}$ 와 $\overline{FH}$ 의 교점을 O 라 하면

점 E 가 $\overline{AB}$ 의 중점이므로

$$\triangle OAE = \triangle OBE$$

또한 점 F 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로

$$\triangle OBF = \triangle OCF$$

$$\therefore S_2 = \triangle OAE + \triangle OCF$$

$$\text{같은 방법으로 } S_4 = \triangle OAH + \triangle OCG$$

$$\therefore S_1 + S_3 = S_2 + S_4$$

15. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x - 4y - 11 = 0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x - 4y - 6 = 0$

② $3x + 4y - 6 = 0$

③ $4x - 3y - 6 = 0$

④ $3x - 4y + 6 = 0$

⑤ $3x + 4y + 6 = 0$

해설

직선 $3x - 4y - 11 = 0$ 위의 임의의 점을 $Q(a, b)$ 라고 하면

$$3a - 4b - 11 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AQ}$ 의 중점을 $P(x, y)$ 라고 하면

$$x = \frac{3+a}{2}, y = \frac{2+b}{2}$$

$$\therefore a = 2x - 3, b = 2y - 2 \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$3(2x - 3) - 4(2y - 2) - 11 = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 6 = 0$$

16. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심

② 내심

③ 수심

④ 무게중심

⑤ 방심

해설

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

송전소의 위치를 $D(x, y)$, 비용을 P 라고 하면

$$P = k\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^2\right.$$

$$\left. + 3\left(y - \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)^2\right\}$$

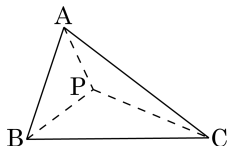
$$- \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{3} - \frac{(y_1 + y_2 + y_3)^2}{3}$$

$+ k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ 에서

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \text{ 일 때}$$

즉 $\triangle ABC$ 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

17. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$ 가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC의 길이는?



① $4\sqrt{3}$

② $5\sqrt{3}$

③ $6\sqrt{3}$

④ $3\sqrt{13}$

⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.

따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$$

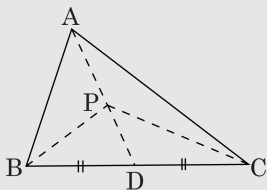
$$\therefore \overline{PD} = 2$$

$\triangle PBC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2)$$

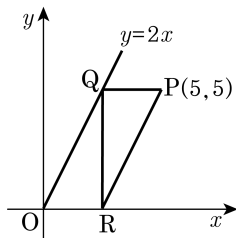
$$3^2 + 5^2 = 2(2^2 + \overline{BD}^2)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13}, \overline{BC} = 2 \cdot \overline{BD} = 2\sqrt{13}$$



18. 다음 그림에서 점 $P(5,5)$ 와 직선 $y = 2x$ 위의 점 Q , x 축 위의 점 R 에 대하여 $\triangle PQR$ 의 둘레의 길이의 최솟값은?

- ① $4\sqrt{10}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{5}$
 ④ $2\sqrt{29}$ ⑤ 2



해설

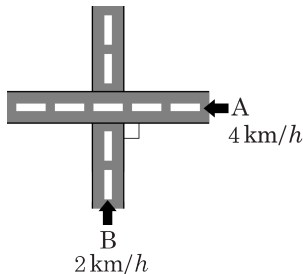
$\overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{RP}$ 의 최솟값은 P 를 $y = 2x$ 에 대해 대칭시킨 P' 와 x 축에 대해 대칭이동시킨 $P''(5, -5)$ 사이 거리와 같다.

$P' = (a, b)$ 라하면 $\overline{PP'}$ 은 $y = 2x$ 에 수직이고
 $\overline{PP'}$ 의 중점은 $y = 2x$ 위에 있다

$$\therefore P' = (1, 7)$$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{QR} + \overline{PR} \geq \overline{P'P''} = \sqrt{4^2 + 12^2} = 4\sqrt{10}$$

19. 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면
 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, -4) 이고
 t 시간 후의 A, B 의 좌표는

A(6 - 4t, 0), B(0, -4 + 2t) 이다.

따라서 t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2} \\ &= \sqrt{20t^2 - 64t + 52} \\ &= \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52} \\ &= \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다.

$\therefore$ 출발 후 1.6 시간 후이다.

20. 삼각형 ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 (5, 4), 변 AB의 중점의 좌표가 (-1, 3), 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, 변 BC의 중점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 5

⑤ 7

해설

점 B(X, Y)라 하면,

$$\overline{AB} \text{의 중점} : \left(\frac{X+5}{2}, \frac{Y+4}{2} \right) = (-1, 3)$$

$$\therefore X = -7, Y = 2$$

이제 점 C(x, y)라 하면,

$$\text{무게중심은} \left(\frac{5 + (-7) + x}{3}, \frac{4 + 2 + y}{3} \right) = (1, 2)$$

$$\therefore x = 5, y = 0$$

$\therefore$ 변 BC의 중점은

$$\left(\frac{-7 + 5}{2}, \frac{2 + 0}{2} \right) = (-1, 1)$$