

1. 두 점 $A(1, 5)$, $B(-3, -1)$ 을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 13$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 52$

③ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

④ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$

⑤ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 52$

해설

원의 중심은 두 점 A , B 의 중점이므로,

$$\left(\frac{1-3}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (-1, 2) \text{ 이다.}$$

또, 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13$$

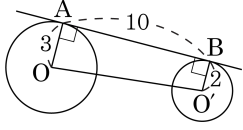
2. 점 $(2, 1)$, $(4, -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 (a, b) 라 하면
 y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
 $r = |a|$ 이다.
 $\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \dots\dots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}$ 이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로
 $(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
 $\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}$ 이 점 $(4, -1)$ 을 지나므로
 $(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
 $b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \dots\dots \textcircled{C}$
 $\textcircled{B} \times 2 - \textcircled{C}$ 에서 $b^2 - 6b - 7 = 0, (b+1)(b-7) = 0$
 $\therefore b = -1, 7$
이때, $\textcircled{B}$ 에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$
 $\therefore r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

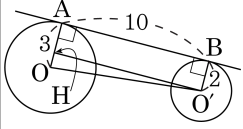
3. 다음 그림의 두 원 O, O' 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



- ① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O' 에서 선분 AO 에 내린
수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 $OO'H$ 에서
 $OO' = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



4. 세 점 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3, -1)$

② $(2, 1)$

③ $(4, 2)$

④ $(-3, -2)$

⑤ $(3, -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \dots \textcircled{1}$ 이라 하면,

$\textcircled{1}$ 은 $(-3, 1)$, $(5, 5)$, $(-2, -2)$ 를 지나므로

$$\begin{cases} 10 - 3A + B + C = 0 \\ 50 + 5A + 5B + C = 0 \\ 8 - 2A - 2B + C = 0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$A = -4$, $B = -2$, $C = -20$

따라서, 구하는 원은 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$

즉, $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ 이고 중심은 $(2, 1)$

5. 직선 $y = 2x + b$ 와 원 $x^2 + y^2 = 4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b < -\sqrt{5}$ 또는 $b > \sqrt{5}$

② $b < -2\sqrt{5}$ 또는 $b > 2\sqrt{5}$

③ $b < -3\sqrt{5}$ 또는 $b > 3\sqrt{5}$

④ $b < -4\sqrt{5}$ 또는 $b > 4\sqrt{5}$

⑤ $b < -5\sqrt{5}$ 또는 $b > 5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$$5x^2 + 4bx + b^2 - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = (2b)^2 - 5(b^2 - 4) = -b^2 + 20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 $\textcircled{1}$ 이

실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} < 0 \text{ 에서 } -b^2 + 20 < 0, b^2 - 20 > 0$$

$$\therefore b < -2\sqrt{5} \text{ 또는 } b > 2\sqrt{5}$$

6. 원 밖의 점 $(1, -2)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?
- ① $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$ ② $y = -\frac{2}{3}x - 3$ 또는 $x = 3$
 ③ $y = -x - \frac{3}{4}$ 또는 $x = -2$ ④ $y = -\frac{9}{5}x - \frac{5}{9}$ 또는 $x = -6$
 ⑤ $y = -4x - 3$ 또는 $x = 4$

해설

구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1, -2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
 $y + 2 = m(x - 1)$
 $\therefore mx - y - m - 2 = 0$
이 직선이 중심이 $(0, 0)$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로
 $\frac{|-m - 2|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1,$
 $|m + 2| = \sqrt{m^2 + 1}$
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
 $m^2 + 4m + 4 = m^2 + 1, 4m = -3$
 $\therefore m = -\frac{3}{4}$
따라서, 구하는 접선의 방정식은
 $y + 2 = -\frac{3}{4}(x - 1) \therefore y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$
그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x = 1$ 도
점 $(1, -2)$ 를 지나고
원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.
그러므로 구하는 접선의 방정식은
 $y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ 또는 $x = 1$

7. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

- ① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm
④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

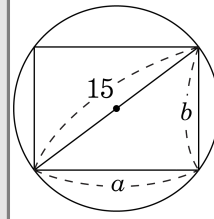
i) $a + b = \frac{42}{2} = 21$

ii) $a^2 + b^2 = 15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2 + (21 - a)^2 - 225 = 0$

$\Rightarrow a = 12, 9$

$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



8. 두 원 $x^2 + y^2 = 9, x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$ 의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설

두 원의 교점을 이은 선분이 공통현 이다.

두 원의 공통현의 방정식은

$$(x^2 + y^2 - 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16) = 0$$

$$\therefore 8x + 6y - 25 = 0$$

이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B 라 하고

공통현 AB의 중점을 M이라고 하면

$\overline{OO'}$ 은 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AM} =$

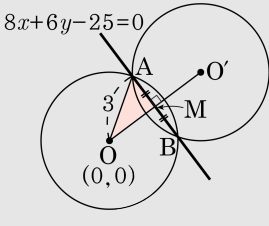
$$2\sqrt{3^2 - \overline{OM}^2} \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

그런데 $\overline{OM}$ 은 원점 O에서 직선 $8x + 6y - 25 = 0$ 까지의 거리이므로

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{2} \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

②을 ①에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{3^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$$



9. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y - 5)^2 = 9$

- ① $y = \pm \sqrt{6}x + 10$

② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설

$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots\textcircled{1},$
 $x^2 + (y - 5)^2 = 9 \dots\dots\textcircled{2}$
공통접선의 방정식을
 $y = ax + b \dots\dots\textcircled{3}$ 로 놓는다.
이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 이 접하므로
$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

 $\therefore |b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots\textcircled{4}$
또, 원 $\textcircled{2}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 도 접하므로
$$\frac{|-5 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

 $\therefore |b - 5| = 3\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots\textcircled{5}$
그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{4} \div \textcircled{5}$ 을 하면
$$\frac{|b - 5|}{b} = \frac{3}{4}$$

 $4|b - 5| = 3|b|, \quad 4(b - 5) = \pm 3b$
 $\therefore b = 20 \text{ 또는 } b = \frac{20}{7}$
(i) $b = 20$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서 $\sqrt{a^2 + 1} = 5$
 $\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$
(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서
 $\sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{7}$ 이고,
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.
(i), (ii)로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
 $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

10. 직선 $4x - 3y - 15 = 0$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 이르는 거리의 최대값을 m , 최소값을 n 이라 할 때, $m - n$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

원의 중심 $O(0, 0)$ 에서
직선 $4x - 3y - 15 = 0$ 에 이르는 거
리는

$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 3$$

따라서 직선에서 원에 이르는 거리
의 최댓값과 최솟값은
(최댓값) $= \overline{OH} + (\text{반지름의 길이}) = 3 + 1 = 4$
(최솟값) $= \overline{OH} - (\text{반지름의 길이}) = 3 - 1 = 2$
 $\therefore m - n = 4 - 2 = 2$

