1. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 5)$, $B(-3,\ -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2+(y+2)^2=13$
② $(x-1)^2+(y-2)^2=52$
③ $(x-1)^2+(y+2)^2=13$
④ $(x+1)^2+(y-2)^2=13$
⑤ $(x+1)^2+(y-2)^2=52$

해설

원의 중심은 두 점 $A,\ B$ 의 중점이므로,

$\left(\frac{1-3}{2},\ \frac{5-1}{2}\right)=(-1,\ 2)$ 이다.

또, 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{13}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-2)^2=13$

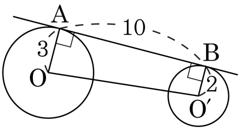
2. 점 $(2,\ 1)$, $(4,\ -1)$ 을 지나고, y 축에 접하는 두 개의 원 중 큰 원의 반지름의 길이는?

① 10 ② 8 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

해설

중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 하면
y 축에 접하므로 반지름의 길이 r 는
$r = |a|$ 이다.
$\therefore\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 \cdots\cdots$ ㉠
㉠이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-a)^2 + (1-b)^2 = a^2$
$\therefore b^2 - 4a - 2b + 5 = 0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠이 점 $(4,\ -1)$ 을 지나므로
$(4-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$
$b^2 - 8a + 2b + 17 = 0 \cdots\cdots$ ㉢
㉡ $\times 2 -$ ㉢에서 $b^2 - 6b - 7 = 0$, $(b+1)(b-7) = 0$
$\therefore\ b = -1,\ 7$
이때, ㉡에서 $b = -1$ 이면 $a = 2$, $b = 7$ 이면 $a = 10$
$\therefore\ r = 2$ 또는 10
따라서 큰 원의 반지름의 길이는 10 이다.

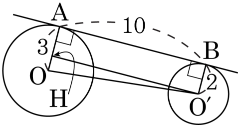
3. 다음 그림의 두 원 O, O′ 에서 공통접선 AB 의 길이가 10 이고, 두 원의 반지름의 길이가 각각 3, 2 일 때, 두 원의 중심거리는?



① $\sqrt{101}$ ② $\sqrt{103}$ ③ $\sqrt{105}$ ④ $\sqrt{106}$ ⑤ $\sqrt{107}$

해설

중심 O′ 에서 선분 AO 에 내린
수선의 발을 H 라 하면,
직각삼각형 OO′H 에서
$\overline{OO'} = \sqrt{10^2 + (3-2)^2} = \sqrt{101}$



4. 세 점$(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2, 2)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형의 외접원의 중심(외심)의 좌표를 구하면?

① $(3,\ -1)$ ② $(2,\ 1)$ ③ $(4,\ 2)$

④ $(-3,\ -2)$ ⑤ $(3,\ -2)$

해설

외접원의 방정식을

$x^2+y^2+\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0 \cdots$ ㉠ 이라 하면,

㉠은 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 5)$, $(-2,\ -2)$를 지나므로

$$\begin{cases} 10-3\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 50+5\mathrm{A}+5\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \\ 8-2\mathrm{A}-2\mathrm{B}+\mathrm{C}=0 \end{cases}$$

세 식을 연립하여 풀면

$\mathrm{A}=-4$, $\mathrm{B}=-2$, $\mathrm{C}=-20$

따라서, 구하는 원은 $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

즉, $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ 이고 중심은 $(2,\ 1)$

5. 직선 $y=2x+b$ 와 원 $x^2+y^2=4$ 이 만나지 않을 때, 상수 b 의 범위를 구하면?

① $b<-\sqrt{5}$ 또는 $b>\sqrt{5}$

② $b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$

③ $b<-3\sqrt{5}$ 또는 $b>3\sqrt{5}$

④ $b<-4\sqrt{5}$ 또는 $b>4\sqrt{5}$

⑤ $b<-5\sqrt{5}$ 또는 $b>5\sqrt{5}$

해설

원과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식

$5x^2+4bx+b^2-4=0 \cdots\cdots$ ㉠

의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4}=(2b)^2-5\left(b^2-4\right)=-b^2+20$$

원과 직선이 만나지 않으려면 ㉠이

실근을 갖지 않아야 하므로

$\dfrac{D}{4}<0$ 에서 $-b^2+20<0, b^2-20>0$

$\therefore b<-2\sqrt{5}$ 또는 $b>2\sqrt{5}$

6. 원 밖의 점 $(1,-2)$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 그은 접선의 방정식을 구하면?

① $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$ 또는 $x=1$

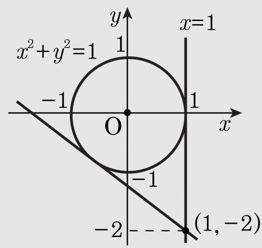
② $y=-\frac{2}{3}x-3$ 또는 $x=3$

③ $y=-x-\frac{3}{4}$ 또는 $x=-2$

④ $y=-\frac{9}{5}x-\frac{5}{9}$ 또는 $x=-6$

⑤ $y=-4x-3$ 또는 $x=4$

해설



구하는 접선의 기울기를 m 이라고 하면
점 $(1,-2)$ 를 지나는 접선의 방정식은
$y+2=m(x-1)$
$\therefore mx-y-m-2=0$
이 직선이 중심이 $(0,0)$ 이고
반지름의 길이가 1 인 원에 접하므로

$$\frac{|-m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1,$$

$|m+2|=\sqrt{m^2+1}$
이 식의 양변을 제곱하여 정리하면
$m^2+4m+4=m^2+1,\ 4m=-3$

$$\therefore m=-\frac{3}{4}$$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$$y+2=-\frac{3}{4}(x-1)\ \therefore y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$$

그런데 다음 그림에서 보듯이 직선 $x=1$ 도
점 $(1,-2)$ 를 지나고
원 $x^2+y^2=1$ 에 접하는 직선임을 알 수 있다.
그러므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4} \text{ 또는 } x=1$$

7. 지름의 길이가 15 cm 인 원에 내접하며 둘레의 길이가 42 cm 인 직사각형의 두 변의 길이는?

① 6 cm, 8 cm ② 6 cm, 10 cm ③ 6 cm, 12 cm

④ 9 cm, 10 cm ⑤ 9 cm, 12 cm

해설

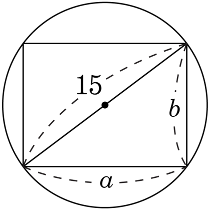
i) $a+b=\dfrac{42}{2}=21$

ii) $a^2+b^2=15^2$

i), ii) 를 연립하면, $a^2+(21-a)^2-225=0$

$\Rightarrow \quad a=12,\ 9$

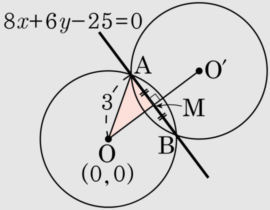
$\therefore$ 두 변의 길이는 12 cm, 9 cm



8. 두 원 $x^2+y^2=9, x^2+y^2-8x-6y+16=0$의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{11}$ ⑤ $\sqrt{13}$

해설



두 원의 교점을 이은 선분이 공통현이다.
두 원의 공통현의 방정식은
$(x^2+y^2-9)-(x^2+y^2-8x-6y+16)=0$
$\therefore 8x+6y-25=0$
이때, 다음 그림과 같이 이 두 원의 교점을 A, B라 하고 공통현 AB의 중점을 M이라고 하면
$\overline{OO'}$은 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 $\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\overline{OM}^2}\cdots\cdots$㉠
그런데 $\overline{OM}$은 원점 O에서 직선 $8x+6y-25=0$까지의 거리이므로

$$\overline{OM}=\frac{|-25|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\frac{5}{2}\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\overline{AB}=2\overline{AM}=2\sqrt{3^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=2\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$$

9. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2+y^2=16,\quad x^2+(y-5)^2=9$$

① $y=\pm\sqrt{6}x+10$

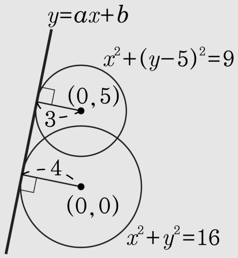
② $y=\pm2\sqrt{6}x+20$

③ $y=\pm3\sqrt{6}x+30$

④ $y=\pm4\sqrt{6}x+40$

⑤ $y=\pm5\sqrt{6}x+50$

해설



$x^2+y^2=16\cdots\cdots$㉠,

$x^2+(y-5)^2=9\cdots\cdots$㉡

공통접선의 방정식을

$y=ax+b\cdots\cdots$㉢ 로 놓는다.

이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=4$$

$\therefore |b|=4\sqrt{a^2+1}\cdots\cdots$㉣

또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=3$$

$\therefore |b-5|=3\sqrt{a^2+1}\cdots\cdots$㉤

그런데 $b\neq0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b}=\frac{3}{4}$$

$4|b-5|=3|b|,\ 4(b-5)=\pm3b$

$\therefore b=20$ 또는 $b=\dfrac{20}{7}$

(i) $b=20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1}=5$

$\therefore a=\pm2\sqrt{6}$

(ii) $b=\dfrac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서

$\sqrt{a^2+1}=\dfrac{5}{7}$ 이고,

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii) 로부터 $a=\pm2\sqrt{6}, b=20$ 이므로

구하는 공통접선의 방정식은

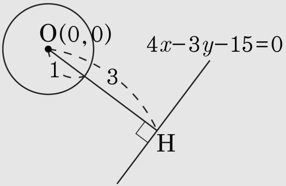
$y=\pm2\sqrt{6}x+20$

10. 직선 $4x-3y-15=0$ 에서 원 $x^2+y^2=1$ 에 이르는 거리의 최대값을 m, 최소값을 n 이라 할 때, $m-n$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

원의 중심 O(0, 0) 에서 직선 $4x-3y-15=0$ 에 이르는 거리는



$$\frac{|-15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=3$$

따라서 직선에서 원에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값은

(최댓값)$=\overline{\mathrm{OH}}+$(반지름의 길이)$=3+1=4$

(최솟값)$=\overline{\mathrm{OH}}-$(반지름의 길이)$=3-1=2$

$\therefore\ m-n=4-2=2$