

1. 분수함수 $y = \frac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x = a, y = b$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = \frac{2x-1}{x-1} \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{x-1} \text{ 이므로,}$$

점근선은 $y = 2, x = 1$ 이다.
 $\therefore a+b = 3$

2. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

- ① 그래프는 x 축과 점 $(\frac{5}{3}, 0)$ 에서 만난다.
- ② 정의역은 $\{x|x \leq -3\}$ 이다.
- ③ 치역은 $\{y|y \geq -1\}$ 이다.
- ④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.
- ⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$$y = \sqrt{14} - 2$$

따라서, 점 $(\frac{5}{3}, \sqrt{14} - 2)$ 를 지난다.

② $9+3x \geq 0$ 에서 $x \geq -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \geq -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \geq 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \geq -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

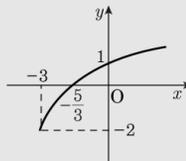
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

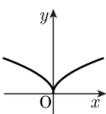
그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.

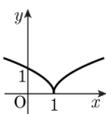


3. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$ 의 그래프를 구하면?

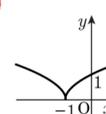
①



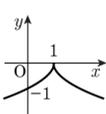
②



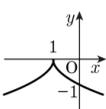
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$ 이면 $y = \sqrt{x+1}$
 $x < -1$ 이면 $y = \sqrt{-x-1}$ 이므로
 3번이 정답임.

4. 다음 유리식을 간단히 하여라.

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}} \\ &= 1 - \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{2}-1}} \\ &= 1 - (1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \end{aligned}$$

5. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 1$

▷ 정답: $b = 2$

▷ 정답: $c = 3$

▷ 정답: $d = 4$

▷ 정답: $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \\ \therefore a &= 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \end{aligned}$$

6. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2, y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + 1 \therefore k = 1$$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -2$$

따라서 $abc = 2$

7. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($d > 0$) 와 $g(x) = \frac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f \circ g)(x) = x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x = m, y = n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f \circ g = I$ 이므로

$$g = f^{-1} \text{ 또는 } g^{-1} = f$$

$y = g(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y = \frac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx+4y = x+2$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)x = -4y+2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-4y+2}{3y-1}$$

$$\therefore y = g^{-1}(x) = \frac{-4x+2}{3x-1}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(x) \\ &= \frac{-4x+2}{3x-1} \\ &= \frac{3x-1}{cx+d} \quad (d > 0) \text{ 이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-2}{-3x+1} \\ &= \frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{점근선의 방정식은 } x = \frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m = \frac{1}{3}, n = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore m+n = -1$$

8. $a + b \leq 100$ 이고 $\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 (a, b) 의 개수는?

- ① 1개 ② 5개 ③ 7개 ④ 9개 ⑤ 13개

해설

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b} = 13$$

분모, 분자에 ab 를 곱하면

$$\frac{a^2b+a}{b+ab^2} = \frac{a(ab+1)}{b(1+ab)} = \frac{a}{b} = 13$$

$$\therefore a = 13b$$

$a + b \leq 100$ 에 대입하면

$$14b \leq 100, 0 < b \leq \frac{100}{14} < 8$$

따라서 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 이므로

(a, b) 의 개수는 7개

9. $x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$ 에 대하여 $x^3 + x^2 + x + 1 = a\sqrt{3} + b$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 유리수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$2x + 1 = \sqrt{3}, (2x + 1)^2 = 3$$

$$\therefore 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x^3 + x^2 + x + 1$$

$$= (2x^2 + 2x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{3}{2}x + 1$$

$$= \frac{3}{2}x + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} = a\sqrt{3} + b$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

10. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$$

근의 공식으로 풀면

$$x^2 = 4 - \sqrt{15} \quad (\because 0 < x < 1) \dots \textcircled{1}$$

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}} \quad (\because 0 < x)$$

$$= \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 따라

$$x^2 + \sqrt{6}x$$

$$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$$