1. 분수함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 의 그래프의 점근선이 $x=a,\ y=b$ 일 때, 상수 a,b 의 합 $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y=\dfrac{2x-1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad y=2+\dfrac{1}{x-1}$ 이므로,

점근선은 $y=2,\ x=1$ 이다.

$\therefore a+b=3$

2. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$ 에서 만난다.

② 정의역은 $\{x | x \le -3\}$ 이다.

③ 치역은 $\{y | y \ge -1\}$ 이다.

④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.

⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$y = \sqrt{14} - 2$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3},\ \sqrt{14} - 2\right)$ 를 지난다.

② $9 + 3x \ge 0$ 에서 $x \ge -3$

따라서, 정의역은 $\{x | x \ge -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \ge 0$ 이므로 치역은

$\{y | y \ge -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x} - 2 = \sqrt{3(x+3)} - 2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

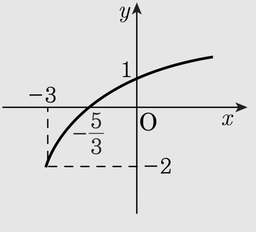
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x} - 2$ 의 그래프는

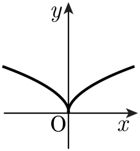
그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.

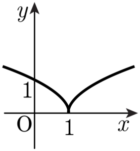


3. 다음 중 함수 $y = \sqrt{|x+1|}$의 그래프를 구하면?

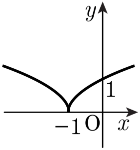
①



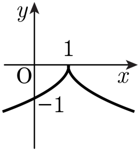
②



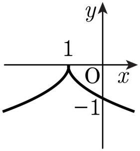
③



④



⑤



해설

$x \geq -1$이면 $y = \sqrt{x+1}$

$x < -1$이면 $y = \sqrt{-x-1}$이므로

3번이 정답임.

4. 다음 유리식을 간단히 하여라.

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}}$$

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\sqrt{2}}}} = 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}}$$

$$= 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}}$$

$$= 1-\cfrac{\cfrac{1}{-1}}{\sqrt{2}-1}$$

$$= 1-(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

5. 등식 $\dfrac{225}{157}=a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ 를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=1$

▷ 정답 : $b=2$

▷ 정답 : $c=3$

▷ 정답 : $d=4$

▷ 정답 : $e=5$

해설

$$\frac{225}{157}=1+\frac{68}{157}=1+\cfrac{1}{\cfrac{157}{68}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{21}{68}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{5}{21}}}$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5$

6. 함수 $y = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1,\ 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2$, $y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2,\ y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots ①$$

①이 $(1,\ 0)$ 을 지나므로

$0 = -k + 1 \therefore\ k = 1$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$\therefore\ a = 1,\ b = -1,\ c = -2$

따라서 $abc = 2$

7. 함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}(d>0)$ 와 $g(x)=\dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f\circ g)(x)=x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x=m, y=n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f\circ g=I$ 이므로

$g=f^{-1}$ 또는 $g^{-1}=f$

$y=g(x)$ 의 역함수를 구하면

$$y=\frac{x+2}{3x+4}\Leftrightarrow 3yx+4y=x+2$$

$$\Leftrightarrow (3y-1)x=-4y+2$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{-4y+2}{3y-1}$$

$$\therefore y=g^{-1}(x)=\frac{-4x+2}{3x-1},$$

$$f(x)=g^{-1}(x)=\frac{-4x+2}{3x-1}=\frac{ax+b}{cx+d}(d>0)\text{이므로}$$

$$f(x)=\frac{4x-2}{-3x+1}=\frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{4}{3}+\frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x=\dfrac{1}{3}$, $y=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m=\dfrac{1}{3}$, $n=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore m+n=-1$

8. $a+b \leq 100$이고 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$을 만족하는 양의 정수 쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 1개 ② 5개 ③ 7개 ④ 9개 ⑤ 13개

해설

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$$

분모, 분자에 ab를 곱하면

$$\frac{a^2b+a}{b+ab^2}=\frac{a(ab+1)}{b(1+ab)}=\frac{a}{b}=13$$

$\therefore\ a=13b$

$a+b \leq 100$에 대입하면

$$14b \leq 100,\ 0<b \leq \frac{100}{14}<8$$

따라서 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이므로

$(a,\ b)$의 개수는 7개

9. $x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$에 대하여 $x^3 + x^2 + x + 1 = a\sqrt{3} + b$가 성립할 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$2x + 1 = \sqrt{3},\ (2x+1)^2 = 3$$

$$\therefore\ 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1$$

$$= (2x^2 + 2x - 1)\cdot\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{3}{2}x + 1$$

$$= \frac{3}{2}x + 1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 1$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} = a\sqrt{3} + b$$

$$\therefore\ a + b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

10. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=8$ 일 때, $x^2+\sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0<x<1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+\dfrac{1}{x^2}=8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$(x^2)^2-8x^2+1=0$

근의 공식으로 풀면

$x^2=4-\sqrt{15}\ (\because\ 0<x<1)\cdots①$

$x=\sqrt{4-\sqrt{15}}\ (\because\ 0<x)$

$=\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{15}}{2}}=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots②$

①, ②에 따라

$x^2+\sqrt{6}x$

$=(4-\sqrt{15})+\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$=4-\sqrt{15}+\sqrt{15}-3=1$