1. 모든 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 될 실수 m의 값의 범위는?

① $0 < m < 4$　② $4 \le m \le 8$　③ $0 \le m < 8$

④ $4 < m \le 8$　⑤ $m \ge 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$이어야 한다.

ⅰ) $m = 0$일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$이므로
모든 실수 x에 대하여 항상 성립한다.

ⅱ) $m \neq 0$일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$가
모든 실수 x에 대하여 항상 성립하려면
$m > 0 \cdots$ ㉠
또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$의 판별식을
D라 할 때
$D = (-m)^2 - 8m < 0,\ m(m-8) < 0$
$\therefore 0 < m < 8 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$
ⅰ), ⅱ)에서 $0 \le m < 8$

2. $\begin{cases} x^2-3x\le 0 \\ x^2-5x+4<0 \end{cases}$ 을 만족하는 x 의 범위의 해가 $\alpha < x \le \beta$ 일 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x^2-3x\le 0$ 에서
$x(x-3)\le 0$ 이므로
$0\le x\le 3\cdots$㈎
$x^2-5x+4<0$ 에서
$(x-1)(x-4)<0$ 이므로
$1<x<4\cdots$㈏
㈎, ㈏에 의해
$1<x\le 3$ 이므로
$\alpha=1, \beta=3$
$\therefore \alpha+\beta=4$

3. 두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4,-3), \mathrm{B}(a,3)$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(a-4)^2+(3+3)^2} \\ &= \sqrt{a^2-8a+52} \\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2-8a+52=72$

$a^2-8a-20=0$

$(a-10)(a+2)=0$

$\therefore a=10(\because a>0)$

4. 두 점 $A(-3, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표는?

① $(-3,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$
④ $(-1,\ 0)$ ⑤ $(5,\ 0)$

해설

x축 위의 점을 $P(x, 0)$라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$이므로
$(x+3)^2 + (0-2)^2 = (x-4)^2 + (0-5)^2$
$14x = 28$
따라서 $x = 2$ 즉, $P(2,\ 0)$

5. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점의 좌표가 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(6,\ 3)$이고 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점을 D라 하자. 삼각형 BCD의 무게중심의 좌표가 $(x,\ y)$일 때, $x-y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 점 A$(1,\ 1)$, B$(2,\ 4)$이므로
점 D의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$$a=\frac{2\cdot 2-1\cdot 1}{2-1}=3,\ b=\frac{2\cdot 4-1\cdot 1}{2-1}=7$$

따라서 D$(3,\ 7)$이므로
삼각형 BCD의 무게중심의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\frac{2+6+3}{3}=\frac{11}{3},\ y=\frac{4+3+7}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\therefore x-y=\frac{11}{3}-\frac{14}{3}=-1$$

6. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle$ABC 에서 $\angle$A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설
$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

7. 세 점 A$(1, 4)$, B $(-1, 2)$, C $(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값을 구하면?

① 2 ② 8 ③ 10 ④ -2 ⑤ -4

해설

A, B를 지나는 직선의 방정식은

기울기 $= \dfrac{4-2}{1-(-1)} = 1$

$y = 1 \cdot (x-1) + 4 = x + 3$

위에 $C(5,\ a)$가 존재하므로 대입하면,

$\therefore\ a = 5 + 3 = 8$

8. 직선 $ax + by + c = 0$은 $ab > 0$, $bc < 0$일 때, 몇 사분면을 지나지 않는가?

① 제 1 사분면 ② 제 2 사분면

③ 제 3 사분면 ④ 제 4 사분면

⑤ 제 1 사분면 ,제 2 사분면

해설

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ 에서

$-\frac{a}{b} < 0 \ (\because \ ab > 0)$

$-\frac{c}{b} > 0 \ (\because \ bc < 0)$ 이므로

제 1 사분면, 제 2 사분면, 제 4 사분면을 지난다.

9. 세 점 A(1, 2), B(2, -3), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 에 대하여 점 A를 지나고, $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ ② $y=\frac{1}{2}x+5$ ③ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
④ $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

해설

점 A를 지나고 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점은 $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 (3, 1) 이므로

두 점 (1, 2), (3, 1) 을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1-2}{3-1}(x-1)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

10. 직선 $y = mx + n(m \neq 0)$ 은 직선 $ax + by + c = 0$ 에 평행하고, 직선 $px + qy + r = 0$ 에 수직이다. 다음 중 옳은 것을 모두 구하면?

㉠ $a + bm = 0$	㉡ $p + qm = 0$	㉢ $ap + bq = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉡, ㉢
④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$y = mx + n \cdots ①$

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots ②$

$y = -\frac{p}{q}x - \frac{r}{q} \cdots ③$

Ⅰ) ① // ② : $m = -\frac{a}{b}$

$\therefore a + bm = 0$

Ⅱ) ①⊥③ : $m\left(-\frac{p}{q}\right) = -1$

$\therefore mp - q = 0$

11. 두 직선 $2x+y-7=0$, $3x+2y-12=0$ 의 교점을 지나고 직선 $8x+5y=0$ 에 평행한 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{5}{8}x+\frac{5}{31}$ ② $y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$ ③ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{11}{5}$
④ $y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{11}$ ⑤ $y=-\frac{5}{3}x+\frac{11}{31}$

해설

$2x+y-7=0 \cdots\cdots$ ㉠
$3x+2y-12=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times 2-$ ㉡ : $x=2,\ y=3$
$\therefore$ ㉠, ㉡의 교점 : $(2,\ 3)$
구하는 직선의 기울기는 $-\frac{8}{5}$
$\left(\because\ y=-\frac{8}{5}x\right.$ 와 평행하다.$\Big)$
$\therefore$ 구하는 직선은 기울기 $-\frac{8}{5}$ 이고
$(2,\ 3)$ 을 지나므로
$y-3=-\frac{8}{5}(x-2)$
$\therefore y=-\frac{8}{5}x+\frac{31}{5}$

12. 두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는 ?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

두 점 $(2, -1)$, $(4, 3)$ 을 지나는 직선은

$y + 1 = \frac{3 - (-1)}{4 - 2}(x - 2)$

$\therefore 2x - y - 5 = 0$

원점에서 이 직선까지의 거리는

$\frac{|2 \times 0 - 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

13. 좌표평면 위에서 원점과 직선 $x-y-3+k(x+y)=0$ 사이의 거리를 $f(k)$ 라 할 때, $f(k)$ 의 최댓값은? (단, k 는 상수이다.)

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

해설

$x-y-3+k(x+y)=0$ 에서

$(k+1)x+(k-1)y-3=0$

원점에서 이 직선까지의 거리

$f(k)=\frac{|-3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$

$=\frac{3}{\sqrt{2(k^2+1)}}$

따라서 $f(k)$ 는 분모가 최소일 때

최대가 되므로 $f(k)$ 의 최대값은

$k=0$ 일 때 $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

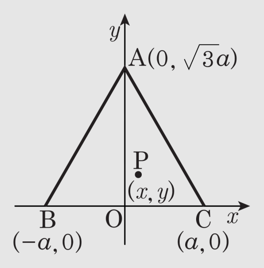
14. 좌표평면 위의 정삼각형 ABC에 대하여 $2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 을 만족시키는 점 P의 자취는 어떤 도형을 그리는가?

① 삼각형　　② 직선　　③ 선분

④ 원　　⑤ 원 아닌 곡선

해설

그림과 같이 변 BC의 중점을 원점으로 하는 좌표축을 설정하고 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(a, 0)$ 이라고 두면, $\mathrm{B}(-a, 0)$, $\mathrm{A}(0, \sqrt{3}a)$ 이다.



이 때, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$ 라 하면

$2\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 + \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이므로

$2\left\{x^2 + 2(y - \sqrt{3}a)^2\right\}$

$= (x+a)^2 + y^2 + (x-a)^2 + y^2$

정리하여 간단히 하면, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore$ 직선

15. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면
$1 \le -x \le 2$
다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$
각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$
각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$
$\therefore p = 3, q = 4$
$\therefore pq = 12$

16. 부등식 $2|x+2|+|x-2|<6$을 만족하는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설

i) $x<-2$일 때

$-2(x+2)-(x-2)<6,\ x>-\frac{8}{3}$

공통부분은 $-\frac{8}{3}<x<-2$

ii) $-2\le x<2$일 때

$2(x+2)-(x-2)<6,\ x<0$

공통부분은 $-2\le x<0$

iii) $x\ge 2$일 때

$2(x+2)+(x-2)<6,\ x<\frac{4}{3}$

공통부분은 없음

i), ii), iii)을 모두 합하면 $-\frac{8}{3}<x<0$

정수 x : $-2,\ -1$ (2개)

17. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3\ge 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

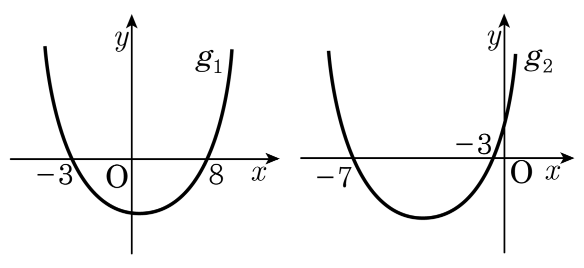
▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3\ge 0$이 항상 성립할 조건은
$D/4=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)\le 0$
$\therefore -1\le a\le 3$
a의 최솟값은 -1

18. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답: 개

▷ 정답: 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

19. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$　　② $m \le -4$　　③ $m \le -2$

④ $m \le 0$　　⑤ $m \le 2$

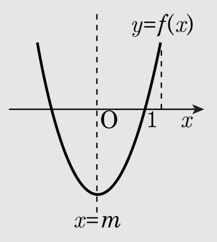
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\dfrac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(i) 판별식 : $\dfrac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠

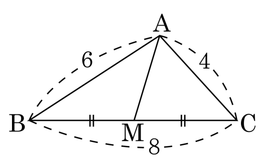
(ii) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(iii) 축 : $m<1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

20. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M 일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

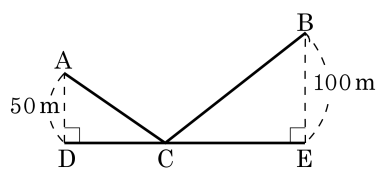
중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

21. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{\mathrm{DE}}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,\mathrm{m}$, $100\,\mathrm{m}$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,\mathrm{m}$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값을 구하여라.



▶ 답: ______ m

▷ 정답: 250 m

해설

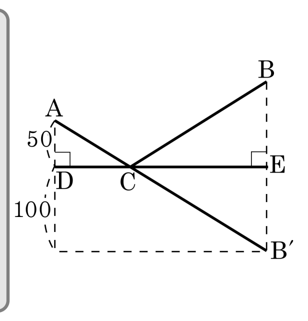
B를 $\overline{\mathrm{DE}}$에 대해 대칭이동한 점을 B′이라 하면

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CB'}}$이므로

$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{CB'}}\ge\overline{\mathrm{AB'}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BC}}$의 최솟값은

$\overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{200^2+150^2}=250(\mathrm{m})$



22. 3km 떨어진 두 마을 ㄱ, ㄴ이 있다. ㄱ마을에는 100명의 학생이, ㄴ마을에는 50명의 학생이 있다. ㄱ, ㄴ두 마을 사이에 학교를 세울 때 통학거리의 합이 최소가 되려면 어디에 학교를 세워야 하는가?

① ㄱ마을

② ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 1km지점

③ 가운데

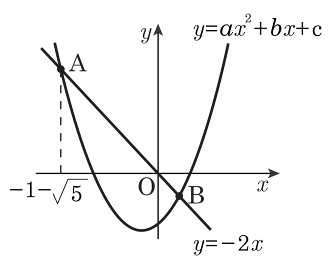
④ ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 2km지점

⑤ ㄴ마을

해설

ㄱ마을에서 $x$km 떨어진 곳에 학교를 세운다면 ㄴ마을 으로부터는 $(3-x)$km 떨어져 있다. 통학거리의 합 S 는 $S = 100x+50(3-x)$
$= 150 + 50x$
$x \geq 0$ 이므로 $x = 0$ 일 때 S 는 최소가 된다. 즉, ㄱ마을에 학교를 세우면 된다.

23. 유리수 a, b, c에 대하여 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$와 직선 $y = -2x$의 그래프가 아래의 그림과 같이 서로 다른 두 점 A, B에서 만나고 점 A의 x좌표는 $-1-\sqrt{5}$이다. 두 점 A, B의 중점의 좌표는?



① $(-\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$　② $(-1,\ \sqrt{5})$　③ $(-2,\ 1)$　④ $(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$　⑤ $(-1,\ 2)$

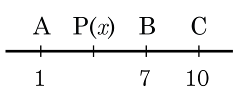
해설

두 그래프의 교점의 x좌표는 두 함수를
연립하여 세운 방정식의 해와 같으므로
$ax^2 + bx + c = -2x$, $ax^2 + (b+2)x + c = 0$의
한 해가 $-1-\sqrt{5}$이다.
그런데 $a,\ b,\ c$가 모두 유리수이므로
이 이차방정식의 나머지 한 해는 $-1+\sqrt{5}$이다.
또, A, B는 $y = -2x$ 위의 점이므로
A, B의 좌표는
$\mathrm{A}(-1-\sqrt{5},\ 2+2\sqrt{5})$, $\mathrm{B}(-1+\sqrt{5},\ 2-2\sqrt{5})$이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{(-1-\sqrt{5})+(-1+\sqrt{5})}{2},\ \frac{(2+2\sqrt{5})+(2-2\sqrt{5})}{2}\right)$$

$= (-1,\ 2)$

24. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?



① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=(x-1)^2+(x-7)^2+(x-10)^2$

$=3(x-6)^2+42$

따라서, $x=6$ 일 때 최소가 된다.

25. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$은 k의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(3,\ 1)$
④ $(-1,\ -3)$ ⑤ $(3,\ 0)$

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k에 대하여
정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$
이 식이 k에 값에 관계없이 성립하려면
$3x+y-4=0,\ 5x-2y-3=0$
이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1,\ y=1$
즉, k의 값에 관계없이 점$(1,\ 1)$을 지난다.