1. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+5=0$, $x^2+5x+a=0$이 공통근을 갖는 실수 a의 값들의 합을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

공통근을 p라 하면
$p^2+ap+5=0,\ p^2+5p+a=0$
두 식을 빼면, $(a-5)p=a-5$
$(a-5)(p-1)=0$
$\therefore a=5$ 또는 $p=1$
$p=1$이면, $1+a+5=0,\ a=-6$
$\therefore a$의 합 : $-6+5=-1$

2. 다음 두 방정식이 공통근 α를 갖는다. 이 때, $m+\alpha$의 값을 구하여라.

$$x^2+(m+2)x-4=0\ ,\ x^2+(m+4)x-6=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(m+2)\alpha-4=0\cdots$ ㉠

$\alpha^2+(m+4)\alpha-6=0\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ 에서 $-2\alpha+2=0\ \therefore\ \alpha=1$

$\alpha=1$을 ㉠에 대입하면 $1+m+2-4=0$

$\therefore\ m=1$

$\therefore\ m+\alpha=2$

3. 다음 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + 4mx - (2m-1) = 0 \\ x^2 + mx + (m+1) = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, m의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2 + 4m\alpha - (2m-1) = 0 \cdots$ ㉠

$\alpha^2 + m\alpha + (m+1) = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡하면

$3m\alpha - 3m = 0$

$3m(\alpha - 1) = 0 \quad \therefore\ m = 0,\ \alpha = 1$

$m = 0$일 때 두 방정식이 일치하므로

단 하나의 공통근이라는 조건에 부적합

$\alpha = 1$을 ㉡에 대입

$1 + m + m + 1 = 0 \quad \therefore\ m = -1$

4. x에 대한 두 이차방정식 $x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2-ax+10=0$, $x^2+x+b=0$의 공통근이 2이므로 $x=2$를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$2^2-2a+10=0$, $2^2+2+b=0$

$\therefore\ a=7,\ b=-6$

이 때, $x^2-7x+10=0$에서

$(x-2)(x-5)=0$이므로 $x=2,\ 5$

또, $x^2+x-6=0$에서

$(x-2)(x+3)=0$이므로 $x=2,\ -3$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은

$5,\ -3$이므로 두 근의 합은 2이다.

5. 다음 방정식을 만족하는 실수 x, y의 합을 구하여라.

$$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

해설

$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$에서 $x^2y^2+4x^2+y^2+4-8xy=0$
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면
$(x^2y^2-4xy+4)+(4x^24xy+y^2)=0$
이 때, x, y가 실수이므로 $xy-2$, $2x-y$도 실수이다.
$\therefore xy-2=0 \quad \cdots$ ㉠,
$2x-y=0 \quad \cdots$ ㉡
㉡에서 $y=2x$이고, 이것을 ㉠에 대입하면 $x^2=1$
따라서, $x=1$일 때 $y=2$, $x=-1$일 때 $y=-2$
그러므로 x, y의 값은 $x=\pm1$, $y=\pm2$(복부호 동순)
따라서 x, y의 합은 $-3, 3$

6. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5=0$일 때, $x+y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2-4xy+5y^2+2x-8y+5$
$=x^2-2(2y-1)x+4y^2-4y+1+y^2-4y+4$
$=x^2-2(2y-1)x+(2y-1)^2+(y-2)^2$
$=(x-2y+1)^2+(y-2)^2=0$
$\therefore\ x-2y+1=0,\ y-2=0$이므로
$y=2,\ x-4+1=0 \quad \therefore\ x=3$
따라서 $x+y=3+2=5$

7. $|x+1|+|y-2|=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$의 곱 xy의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$|x+1|\geq 0,\ |y-2|\geq 0$이므로 $x+1=0,\ y-2=0$

$\therefore\ x=-1,\ y=2$

따라서, 구하는 값은 $xy=-1\cdot 2=-2$

8. 방정식 $x^2-2xy+y^2+|x+y-2|=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 xy의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x-y)^2+|x+y-2|=0$
이 때, $(x-y)^2 \geq 0,\ |x+y-2| \geq 0$이므로
㉠이 성립하려면 $x-y=0,\ x+y-2=0$이어야 한다.
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=1$
$\therefore\ xy=1$

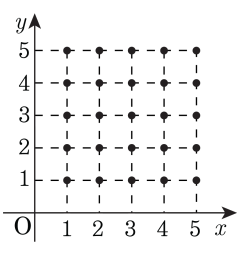
9. $x^2+y^2-2y+1=0$을 만족하는 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2-2y+1=0$에서 $x^2+(y-1)^2=0$
x, y는 실수이므로 $x^2 \geq 0$, $(y-1)^2 \geq 0$
따라서, $x=0$, $y-1=0$이므로 $x=0$, $y=1$
$\therefore\ x+y=0+1=1$

10. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개　② 1 개　③ 2 개
④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$xy+x-2y-2=x(y+1)-2(y+1)$
$=(x-2)(y+1)$ 이므로
$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는
i) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$
ii) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$
iii) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$
iv) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,
$x=-1,\ y=-2$
$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

11. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

주어진 식을 변형하면

$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$

$(x-3)(y+2)=4$

$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$x-3=1,\ y+2=4$

$\therefore\ x=4,\ y=2$

12. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 x, y가 양의 정수이므로
$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

13. $xy-3x-3y+4=0$을 만족하는 양의 정수 $x,\ y$의 합 $x+y$의 값은?

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

해설

$xy-3x-3y+4=0$에서
$x(y-3)-3(y-3)-5=0,\ (x-3)y-3=5$
$x\geq 1,\ y\geq 1$이므로 $x-3\geq -2,\ y-3\geq -2$
(i) $x-3=1,\ y-3=5$일 때, $x=4.\ y=8$
(ii) $x-3=5,\ y-3=1$일 때, $x=8,\ y=4$
따라서, 구하는 값은 $x+y=4+8=8+4=12$

14. $x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+(m-1)x+m+1=0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha+\beta=1-m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta=m+1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta+\alpha+\beta=2$ (α, β는 정수)

$(\alpha+1)(\beta+1)=3$

$\therefore \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=2\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha=-2\\ \beta=-4\end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m=-1,\ 7$

15. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0$ ·····㉠

$\alpha^2+\alpha+3k=0$ ·····㉡

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0$ $\therefore$ $k=-4$

$\therefore$ $\alpha-k=7$

16. p가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$이 오직 한 개의 공통근 α를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\alpha^2+p\alpha+3=0$
$\alpha^2+3\alpha+p=0$
$\alpha(p-3)-(p-3)=(\alpha-1)(p-3)=0$
$\alpha=1$ *or* $p=3$
$p=3$ 이면 두 다항식이 같아지므로 $\alpha=1$
$\therefore 1+p+3=0 \quad \therefore\ p=-4$
$\therefore\ \alpha-p=1-(-4)=5$

17. 이차방정식 $x^2+mx-m+1=0$이 양의 정수근 $\alpha,\beta(\alpha<\beta)$를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-m & \cdots ① \\ \alpha\beta=-m+1 & \cdots ②\end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$, $(\alpha-1)(\beta-1)=2$

α,β 가 양의 정수이므로

$\alpha-1=1,\beta-1=2$ 또는 $\alpha-1=2,\beta-1=1$

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,3),(3,2)$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

$\alpha+\beta=-m$ 이므로 $m=-5$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2+m=13+(-5)=8$