

1.  $x$ 에 대한 두 이차방정식  $x^2 + ax + 5 = 0$ ,  $x^2 + 5x + a = 0$ 이 공통근을 갖는 실수  $a$ 의 값들의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

공통근을  $p$ 라 하면

$$p^2 + ap + 5 = 0, p^2 + 5p + a = 0$$

두 식을 빼면,  $(a - 5)p = a - 5$

$$(a - 5)(p - 1) = 0$$

$$\therefore a = 5 \text{ 또는 } p = 1$$

$$p = 1 \text{이면, } 1 + a + 5 = 0, a = -6$$

$$\therefore a \text{의 합: } -6 + 5 = -1$$

2. 다음 두 방정식이 공통근  $\alpha$ 를 갖는다. 이 때,  $m + \alpha$ 의 값을 구하여라.

$$x^2 + (m + 2)x - 4 = 0, x^2 + (m + 4)x - 6 = 0$$

▶ 답:

▷ 정답: 2

### 해설

두 방정식의 공통근이  $\alpha$ 이므로

$$\alpha^2 + (m + 2)\alpha - 4 = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha^2 + (m + 4)\alpha - 6 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{ 에서 } -2\alpha + 2 = 0 \therefore \alpha = 1$$

$$\alpha = 1 \text{ 을 } \textcircled{㉠} \text{ 에 대입하면 } 1 + m + 2 - 4 = 0$$

$$\therefore m = 1$$

$$\therefore m + \alpha = 2$$

3. 다음 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2 + 4mx - (2m - 1) = 0 \\ x^2 + mx + (m + 1) = 0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때,  $m$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

공통근을  $\alpha$ 라 하면

$$\alpha^2 + 4m\alpha - (2m - 1) = 0 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$\alpha^2 + m\alpha + (m + 1) = 0 \cdots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma} - \textcircled{\Delta}$ 하면

$$3m\alpha - 3m = 0$$

$$3m(\alpha - 1) = 0 \quad \therefore m = 0, \alpha = 1$$

$m = 0$ 일 때 두 방정식이 일치하므로

단 하나의 공통근이라는 조건에 부적합

$\alpha = 1$ 을  $\textcircled{\Delta}$ 에 대입

$$1 + m + m + 1 = 0 \quad \therefore m = -1$$

4.  $x$ 에 대한 두 이차방정식  $x^2 - ax + 10 = 0$ ,  $x^2 + x + b = 0$ 이 공통근 2를 가질 때, 두 이차방정식의 공통근이 아닌 나머지 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

### 해설

$x^2 - ax + 10 = 0$ ,  $x^2 + x + b = 0$ 의 공통근이 2이므로  $x = 2$ 를 두 이차방정식에 각각 대입하면 성립한다.

$$2^2 - 2a + 10 = 0, 2^2 + 2 + b = 0$$

$$\therefore a = 7, b = -6$$

이 때,  $x^2 - 7x + 10 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x - 5) = 0 \text{이므로 } x = 2, 5$$

또,  $x^2 + x - 6 = 0$ 에서

$$(x - 2)(x + 3) = 0 \text{이므로 } x = 2, -3$$

따라서 공통근이 아닌 나머지 두 근은

5, -3이므로 두 근의 합은 2이다.

5. 다음 방정식을 만족하는 실수  $x, y$ 의 합을 구하여라.

$$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

▷ 정답 : 3

### 해설

$(x^2 + 1)(y^2 + 4) = 8xy$ 에서  $x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 4 - 8xy = 0$   
이것을 완전제곱식의 꼴로 변형하면

$$(x^2y^2 - 4xy + 4) + (4x^2 - 4xy + y^2) = 0$$

이 때,  $x, y$ 가 실수이므로  $xy - 2, 2x - y$ 도 실수이다.

$$\therefore xy - 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠},$$

$$2x - y = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉡에서  $y = 2x$ 이고, 이것을 ㉠에 대입하면  $x^2 = 1$

따라서,  $x = 1$ 일 때  $y = 2$ ,  $x = -1$ 일 때  $y = -2$

그러므로  $x, y$ 의 값은  $x = \pm 1, y = \pm 2$ (복부호 동순)

따라서  $x, y$ 의 합은  $-3, 3$

6. 두 실수  $x, y$ 에 대하여  $x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$ 일 때,  $x + y$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy + 5y^2 + 2x - 8y + 5 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + 4y^2 - 4y + 1 + y^2 - 4y + 4 \\ &= x^2 - 2(2y - 1)x + (2y - 1)^2 + (y - 2)^2 \\ &= (x - 2y + 1)^2 + (y - 2)^2 = 0 \\ &\therefore x - 2y + 1 = 0, y - 2 = 0 \text{ 이므로} \\ &y = 2, x - 4 + 1 = 0 \quad \therefore x = 3 \\ &\text{따라서 } x + y = 3 + 2 = 5 \end{aligned}$$

7.  $|x + 1| + |y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수  $x, y$ 의 곱  $xy$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$|x + 1| \geq 0, |y - 2| \geq 0$ 이므로  $x + 1 = 0, y - 2 = 0$

$\therefore x = -1, y = 2$

따라서, 구하는 값은  $xy = -1 \cdot 2 = -2$

8. 방정식  $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수  $x, y$ 에 대하여  $xy$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

### 해설

주어진 방정식을 정리하면  $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때,  $(x - y)^2 \geq 0$ ,  $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

⊕이 성립하려면  $x - y = 0$ ,  $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면  $x = 1$ ,  $y = 1$

$\therefore xy = 1$

9.  $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수  $x, y$ 의 합  $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \text{에서 } x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

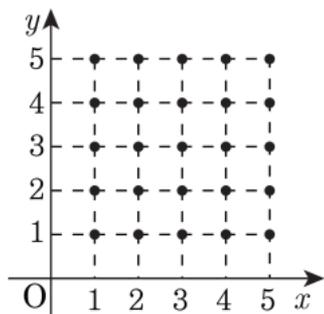
$$x, y \text{는 실수이므로 } x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{따라서, } x = 0, y - 1 = 0 \text{이므로 } x = 0, y = 1$$

$$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$$

10. 다음 그림의 격자점 중  $xy + x - 2y - 2 = 3$ 을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?

- ① 0 개      ② 1 개      ③ 2 개  
 ④ 3 개      ⑤ 4 개



해설

$$xy + x - 2y - 2 = x(y + 1) - 2(y + 1) \\ = (x - 2)(y + 1) \text{ 이므로}$$

$(x - 2)(y + 1) = 3$  에서 문제의  $x, y$  는

- i)  $x - 2 = 1, y + 1 = 3$  일 때,  $x = 3, y = 2$
- ii)  $x - 2 = 3, y + 1 = 1$  일 때,  $x = 5, y = 0$
- iii)  $x - 2 = -1, y + 1 = -3$  일 때,  $x = 1, y = -4$
- iv)  $x - 2 = -3, y + 1 = -1$  일 때,  
 $x = -1, y = -2$

$x, y$  는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은  $(3, 2)$  뿐이다.

11. 방정식  $xy + 2x = 3y + 10$  을 만족하는 양의 정수가  $x = \alpha$ ,  $y = \beta$  일 때,  $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

### 해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, \quad xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, \quad y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

12. 방정식  $2xy - 4x - y = 4$ 를 만족하는 양의 정수  $x, y$ 를 구하면  $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ ,

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = \delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

### 해설

주어진 식을 변형하면  $(2x - 1)(y - 2) = 6$

조건에서  $x, y$ 가 양의 정수이므로

$2x - 1, y - 2$ 도 각각 정수이고 특히  $2x - 1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x - 1 = 1 \\ y - 2 = 6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ y - 2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 \\ y = 8 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$

13.  $xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 을 만족하는 양의 정수  $x, y$ 의 합  $x + y$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 에서

$x(y - 3) - 3(y - 3) - 5 = 0, (x - 3)y - 3 = 5$

$x \geq 1, y \geq 1$ 이므로  $x - 3 \geq -2, y - 3 \geq -2$

(i)  $x - 3 = 1, y - 3 = 5$ 일 때,  $x = 4, y = 8$

(ii)  $x - 3 = 5, y - 3 = 1$ 일 때,  $x = 8, y = 4$

따라서, 구하는 값은  $x + y = 4 + 8 = 8 + 4 = 12$

14.  $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수  $m$ 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라면

$$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{㉠}, \quad \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠ + ㉡을 하면  $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$  ( $\alpha, \beta$ 는 정수)

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면}$$

$$m = -1, 7$$

15. 두 이차방정식  $x^2 + kx + 3 = 0$ ,  $x^2 + x + 3k = 0$ 이 공통인 실근  $\alpha$ 를 가질 때,  $\alpha - k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

### 해설

공통근이  $\alpha$ 이므로

$$\alpha^2 + k\alpha + 3 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\alpha^2 + \alpha + 3k = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠} - \text{㉡} \text{에서 } (k-1)\alpha - 3(k-1) = 0,$$

$$(k-1)(\alpha-3) = 0$$

(i)  $k=1$ 인 경우 두 이차방정식이  $x^2+x+3=0$ 으로 일치하여  
공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

$$\text{(ii) } \alpha=3 \text{인 경우 } 9+3k+3=0 \therefore k=-4$$

$$\therefore \alpha - k = 7$$

16.  $p$ 가 실수일 때, 두 이차방정식  $x^2 + px + 3 = 0$ ,  $x^2 + 3x + p = 0$ 이 오직 한 개의 공통근  $\alpha$ 를 갖는다고 한다. 이 때,  $\alpha - p$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p - 3) - (p - 3) = (\alpha - 1)(p - 3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$p = 3$  이면 두 다항식이 같아지므로  $\alpha = 1$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$

17. 이차방정식  $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근  $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때,  $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면  $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$ ,  $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

$\alpha, \beta$ 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$  또는  $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$  이므로  $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$