1. 8의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

해설

8의 세제곱근은 $x^3=8$을 만족하는 x의 값이므로
$x^3-8=0$에서
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$\therefore\ x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$
따라서 8의 세제곱근은
$2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

2. $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-5}} \times \left(-a^{\frac{2}{3}}\right)^4$ 을 간단히 하면? (단, $a > o$)

① a　　② $a^{\frac{4}{3}}$　　③ a^2　　④ a^4　　⑤ a^5

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-5}} \times \left(-a^{\frac{2}{3}}\right)^4 &= a^{\frac{2}{3}} \div a^{-\frac{3}{5}} \times a^{\frac{8}{3}} \\ &= a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{8}{3}} \\ &= a^5\end{aligned}$$

3. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$
$= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}}$
$= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}$
$= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$

4. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$을 2^k 꼴로 나타낼 때 k는?

① $\frac{11}{12}$ ② $\frac{11}{24}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{23}{24}$ ⑤ 1

해설

$\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$

$= \left\{2 \times (4 \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{2 \times (2^2 \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{2 \times (2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= (2 \times 2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{23}{24}}$

$\therefore k = \frac{23}{24}$

5. $6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① 9　　② 18　　③ 27　　④ 36　　⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} 6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} &= (2 \times 3)^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{6}{3}} \\ &= 2 \times 3^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

6. $a > 0$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}$을 간단히 하면?

① a ② $\sqrt{a}$ ③ $a\sqrt[7]{a^5}$ ④ $\sqrt[8]{a^5}$ ⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}} = (a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

7. $x = 2$ 일 때, $x^{x^{x^{x}}}$ 의 값을 구하면?

① 2^2 ② 2^4 ③ 2^8 ④ 2^{16} ⑤ 2^{32}

해설

$x^{x^{x^{x}}} = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{2^4} = 2^{16}$

8. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㉢　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

㉡ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5 \times 5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

9. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[3]{-64} = -4$

② $\sqrt[4]{81} = 3$

③ $\sqrt[5]{-32} = -2$

④ $-\sqrt[3]{0.008} = -0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}) = 1$

해설

⑤$(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2})$
$= \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[3]{2^3} = 5$

10. $a > 0$일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$을 간단히 하면?

① 2　② $\sqrt{2}$　③ $2\sqrt[4]{a^3}$　④ $\sqrt[4]{a^3}$　⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

11. $x > 0,\ x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$

12. 양의 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$의 값은?(단, $a \neq 1$)

① $\sqrt[10]{a}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$ ③ 1 ④ $\dfrac{1}{\sqrt[15]{a}}$ ⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}}$$

13. $x \geq 0$일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$를 간단히 하면?

① $x\sqrt{x}$ ② $x\sqrt[4]{x}$ ③ $\sqrt[8]{x}$ ④ $\sqrt[8]{x^3}$ ⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

$= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}$

$= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}$

14. $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}}$를 간단히 하여 $\sqrt[n]{4}$로 나타낼 때, 자연수 n의 값은?

① 4　　② 6　　③ 9　　④ 12　　⑤ 18

해설

$$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}} = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{2^4}}}{\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}} \times \frac{\sqrt[9]{\sqrt{5}}}{\sqrt[9]{\sqrt[3]{2^6}}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[18]{5}} \times \frac{\sqrt[18]{5}}{\sqrt[27]{2^6}}$$

$$= \frac{\sqrt[3\times4]{2^4}}{\sqrt[9\times3]{2^{3\times2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[9]{2^3}}{\sqrt[9]{2^2}} = \sqrt[9]{\frac{2^3}{2^2}}$$

$$= \sqrt[9]{2} = \sqrt[18]{4}$$

$\therefore n = 18$

15. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라.
(단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

16. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{4}\times\sqrt[6]{6}=2^a\times3^b$ 일 때 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

해설

$2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{\frac{1}{4}}\times(2\times3)^{\frac{1}{6}}$
$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$
$=2^{\frac{7}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}$
$a=\frac{7}{6},\ b=\frac{1}{2}$
$\therefore a+b=\frac{7+3}{6}=\frac{5}{3}$

17. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$을 $\sqrt{2^k}$의 꼴로 나타낼 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{5}{4} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$

$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k$ 이므로 $\frac{5}{12} = \frac{1}{2}k$

$\therefore\ k = \frac{5}{6}$

18. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x의 값을 구하면?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$$8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5$$

$\therefore x = 5$

19. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로

$k = 5$

20. $x > y > 0$ 일 때, $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$ 를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ ② $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ ③ 1

④ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ ⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$

21. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7}{a^{-3}+a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9}}$$

① a^8　② a^9　③ a^{10}　④ a^{11}　⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10}을 곱하면

$$\frac{a^{10}\times(a+a^2+\cdots+a^7)}{a^7+a^6+\cdots+a^2+a}=a^{10}$$

22. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$ 일 때, $\frac{1}{a}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$$

$$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{7}$$

23. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$　　㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$
$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$
$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$　$\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$　$\therefore$ 거짓

24. $x = 2$일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16 ② 64 ③ 256

④ 1024 ⑤ 65536

해설

$(2^2)^{2^2} = (2^2)^4 = 2^{16}$

$2^{10} = 1024,\ 2^6 = 64$ 이므로

$\therefore\ 2^{16} = 1024 \times 64 = 65536$

25. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.

② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.

③ n이 홀수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개다.

④ n이 짝수일 때, 16의 n제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

해설

$x^n = a$인 실수 x의 개수는 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때, 실수 x는 $\sqrt[n]{a}$로 1개 이다.
(ii) n이 짝수일 때,
$a > 0 \rightarrow$ 실수 x는 $\pm\sqrt[n]{a}$로 2개 이다.
$a = 0 \rightarrow$ 실수 x는 0이므로 1개 이다.
$a < 0 \rightarrow$ 실수 x는 존재하지 않는다.
① $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개
② $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개
③ n이 홀수이므로 실수인 n제곱근은 1개
④ n이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n제곱근은 2개
⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$이므로 실수인 n제곱근은 존재하지 않는다.

26. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$ 로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\times 2}}} \\ &= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2\cdot\sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24}\times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}\end{aligned}$$

따라서 $P=29$, $q=24$이므로 $p+q=53$

27. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$ 의 값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\sqrt[3]{3}=a$, $\sqrt[3]{2}=b$ 라고 하면
$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$
$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$
$=3+2=5$

28. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$ ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$

29. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{34}$ ② $\sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[6]{34}$ ③ $\sqrt[6]{34}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{34}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{7}$ ⑤ $\sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{34}, \sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$

이므로 세 수를 12제곱하면

$7^4 = 2401,\ 10^3 = 1000,\ 34^2 = 1156$

따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면

$\therefore\ \sqrt[4]{10}, \sqrt[6]{34}, \sqrt[3]{7}$

30. 세 수 $A = \sqrt[3]{\sqrt{100}}, B = \sqrt{5}, C = \sqrt[3]{\sqrt{121}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < A < C$

④ $B < C < A$　　⑤ $C < A < B$

해설

$A = \sqrt[3]{\sqrt{100}} = \sqrt[3]{100^{\frac{1}{2}}} = 100^{\frac{1}{6}}$

$B = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 125^{\frac{1}{6}}$

$C = \sqrt[3]{\sqrt{121}} = \sqrt[3]{121^{\frac{1}{2}}} = 121^{\frac{1}{6}}$

이므로 A, B, C 의 대소 관계는 $A < C < B$ 이다

31. $P = \dfrac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$에 대하여 $\sqrt[4]{P}$의 값은?

① $3\sqrt[4]{9}$　② $9\sqrt[4]{3}$　③ $9\sqrt[4]{9}$　④ $9\sqrt[4]{27}$　⑤ 81

해설

$$P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2}$$

$$= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4}$$

$$= \frac{3^{-3}}{3^{-14}}$$

$$= 3^{-3-(-14)} = 3^{11}$$

$$\therefore \sqrt[4]{P} = \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27}$$

32. $10^{0.31} = 2,\ 10^{1.04} = 11$로 계산할 때, $10^{a} = 275$를 만족하는 a의 값은?

① 2.34 ② 2.38 ③ 2.42 ④ 2.46 ⑤ 2.50

해설

$5 = \frac{10}{2} = \frac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69}$이므로

$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$

$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$

$\therefore\ a = 2.42$

33. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 0

해설

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}}$ 이 자연수

$n = -1$일때, 3^3

$n = -3$일때, 3

$\Rightarrow$ 2개

34. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 일 때, $a-\frac{1}{a}$ 의 값은?(단, $a>1$)

① $\frac{15}{4}$　② 5　③ $\frac{15}{2}$　④ 15　⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$에 의하여

$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-4=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$

$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\because a>1)$

$\therefore a-\frac{1}{a}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$

35. $2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$일 때, $8^x+\dfrac{1}{8^x}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$8^x+\dfrac{1}{8^x}=(2^x)^3+\left(\dfrac{1}{2^x}\right)^3$

$=\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)^3-3\cdot 2^x\cdot\dfrac{1}{2^x}\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)$

$=2^3-3\cdot 2=2$

36. $x = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}$의 값은?

① $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　② $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\sqrt[4]{2} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

④ $\sqrt[4]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$　⑤ $\sqrt[8]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

해설

$x^2 + 4 = 2^{\frac{1}{4}} + 2 + 2^{-\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4} = 2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

37. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 일 때, $a+a^{-1}$ 의 값을 구하여라.(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=4^2$

$a+a^{-1}+2=16$

$\therefore a+a^{-1}=14$

38. 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,\ n)$이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, n은 2이상의 자연수 이다.)
$f(5,\ -5)+f(0,\ 5)+f(0,\ 6)+f(5,\ 6)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

(i) $a<0$일 때,
n이 짝수이면 $f(a,\ n)=0$, n이 홀수이면 $f(a,\ n)=1$이므로
$f(5,\ -5)=1$
(ii) $a=0$일 때,
$f(a,\ n)=1$이므로 $f(0,\ 5)=f(0,\ 6)=1$
(iii) $a>0$일 때,
n이 짝수이면 $f(a,\ n)=2$이므로 $f(5,\ 6)=2$
$f(5,\ -5)+f(0,\ 5)+f(0,\ 6)+f(5,\ 6)=1+1+1+2=5$

39. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ n이 홀수일 때, -5의 실수인 n제곱근은 $-\sqrt[n]{5}$이다.

㉡ $2^{\sqrt{2}-1}2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 4^{\sqrt{2}}$

㉢ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}} = \left[\left\{(\sqrt{3})^2\right\}^2\right]^2$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n이 홀수일 때, -5의 실수인 n제곱근은 $\sqrt[n]{-5} = -\sqrt[n]{5}$이다. (참)

㉡ $2^{\sqrt{2}-1}2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 4^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}-1}2^{\sqrt{2}+1}$
$= 2^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}$
$= 2^{2\sqrt{2}} = (2^2)^{\sqrt{2}} = 4^{\sqrt{2}}$(참)

㉢ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}} = (\sqrt{3})^{2^4} = (\sqrt{3})^{16} = 3^8$

$\left[(\sqrt{3})^{2^2}\right]^2 = (3^2)^2 = 3^4$

$\therefore (\sqrt{3})^{2^{2^2}} \neq \left[(\sqrt{3})^{2^2}\right]^2$ (거짓)

40. 다음 중 옳은 것은?

① $a > 0$ 이고 $m, n(m > 0, n > 0)$ 이 정수일 때, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$ 이다.

② $a > 0$ 일 때, $(\sqrt[3]{-a})^3 = -a$ 이다.

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m+n]{a}$ (단, $a > 0$)

해설

① $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m+n]{a} = \sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{a}$

41. 세 수 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[6]{128}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < \sqrt[6]{128}$　　② $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{128}$

③ $\sqrt{5} < \sqrt[6]{128} < \sqrt[3]{11}$　　④ $\sqrt[6]{128} < \sqrt[3]{11} < \sqrt{5}$

⑤ $\sqrt[6]{128} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{11}$

해설

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{128} = 128^{\frac{1}{6}}$

이 때, 지수의 분모를 같게 만들면

$5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}}, 11^{\frac{1}{3}} = 11^{\frac{2}{6}}, 128^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모가 6 으로 모두 같으므로

$5^3, 11^2, 128$ 의 대소를 비교한다.

$5^3 = 125, 11^2 = 121, 128$ 에서

$11^2 < 5^3 < 128$ $\therefore$ $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{128}$

42. 다음 네 수의 크기를 비교하면?

㉠ $\sqrt{2}$	㉡ $\sqrt{3}$	㉢ $\sqrt[3]{4}$	㉣ $\sqrt[4]{5}$

① ㉠ < ㉡ < ㉢ < ㉣
② ㉣ < ㉢ < ㉠ < ㉡
③ ㉣ < ㉢ < ㉡ < ㉠
④ ㉠ < ㉣ < ㉢ < ㉡
⑤ ㉡ < ㉠ < ㉢ < ㉣

해설

㉠ < ㉡

$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} > (\sqrt[3]{4})^3 = 4$

$\therefore$ ㉢ < ㉠ < ㉡

$(\sqrt[3]{4})^{12} = 4^4 = 256 > (\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$

$\therefore$ ㉣ < ㉢ < ㉠ < ㉡

43. 세 수 $A = \sqrt[3]{-3},\ B = \sqrt[5]{-6},\ C = \sqrt[15]{-225}$ 에 대하여 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < C < A$

④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

$A = \sqrt[3]{-3},\ B = \sqrt[5]{-6},\ c = \sqrt[15]{-225}$ 에서

$3, 5, 15$ 의 최소공배수는 15 이므로 각 수를 모두 15 제곱한다.

$A^{15} = (\sqrt[3]{-3})^{15} = \left\{(\sqrt[3]{-3})^3\right\}^5 = (-3)^5 = -243$

$B^{15} = (\sqrt[5]{-6})^{15} = \left\{(\sqrt[5]{-6})^5\right\}^3 = (-6)^3 = -216$

$C^{15} = (\sqrt[15]{-225})^{15} = -225$

이므로 $A^{15} < C^{15} < B^{15}$

$\therefore A < C < B$

44. n이 정수일 때, $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = (64^{-1})^{\frac{1}{n}} = 64^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$

$2^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n

$n = -1$ 일 때, 2^6

$n = -2$ 일 때, 2^3

$n = -3$ 일 때, 2^2

$n = -6$ 일 때, 2

$\therefore\ 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 64 = 78$

45. $2^{2x}+2^{-2x}=5$ 일 때, $2^{3x}+2^{-3x}$ 의 값은?

① 10　　② $4\sqrt{7}$　　③ 12　　④ 15　　⑤ $6\sqrt{7}$

해설

$(2^{2x}+2^{-2x})^3$
$=2^{6x}+2^{-6x}+3\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-2x}(2^{2x}+2^{-2x})$
$=2^{6x}+2^{-6x}+3\times 5$
$2^{6x}+2^{-6x}=5^3-15=110$
$\therefore (2^{3x}+2^{-3x})^2$
$=2^{6x}+2^{-6x}+2$
$=112$
$2^{3x}+2^{-3x}>0$ 이므로 $2^{3x}+2^{-3x}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$

46. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$
$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})$$
$$= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2 - \frac{1}{3})$$
$$= 2 - \frac{1}{2} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

47. $x = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, $x^3 - 3x - 1$ 의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

해설

$2^{\frac{2}{3}} = a$라 하면 $2^{-\frac{2}{3}} = a^{-1}$ $\therefore x = a + a^{-1}$

$x^2 = (a + a^{-1})^2 = a^2 + 2aa^{-1} + a^{-2} = a^2 + 2 + a^{-2}$ 이므로

$x^3 - 3x - 1 = x(x^2 - 3) - 1$

$= (a + a^{-1})(a^2 - 1 + a^{-2}) - 1$

$= a^3 + a^{-3} - 1$

$= 2^2 + 2^{-2} - 1$

$= 4 + \frac{1}{4} - 1 = \frac{13}{4}$

해설

$$\begin{aligned} x^3 &= (2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}})^4 \\ &= 2^2 + 2^{-2} + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}}(2^{\frac{2}{3}} + 2^{-\frac{2}{3}}) \\ &= 4 + \frac{1}{4} + 3x \end{aligned}$$

$\therefore x^3 - 3x = 4 + \frac{1}{4}$

$\therefore x^3 - 3x - 1 = \frac{13}{4}$

48. 거듭제곱근의 성질에 대하여 옳은 것을 다음 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ 8의 세제곱근은 2, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$이다.

㉡ n이 홀수일 때, -2의 n제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[n]{2}$ 뿐이다.

㉢ $x>1$이면 $\sqrt[3]{(1-x)^3}=x-1$이다.

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢

④ ㉠,㉡　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠ $x^3=8$에서 $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2,\ x=-1\pm\sqrt{3}i$(참)

㉡ n이 홀수일 때,

-2의 n제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[n]{-2}=\sqrt[n]{(-1)\times 2}=\sqrt[n]{(-1)^n\times 2}$ (참)

$=-\sqrt[n]{2}$

㉢ $x>1$일 때, $\sqrt[3]{(1-x)^3}=x-1$(거짓)

따라서, 옳은 것은 ㉠,㉡이다.

49. 다음은 $n \geq 2$인 임의의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{3}$이 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt[n]{3}$을 ((가)) 라고 가정하면
> $\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$($p$, q는 (나)) 로 놓을 수 있다.
> $\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$ 의 양변을 n제곱하여 정리하면
> $3p^n = q^n \cdots$ ㉠
> 그런데 ㉠에서 q^n이 ((다))) 이므로
> $q = 3k$ (단, k는 자연수) $\cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면 $p^n = 3^{n-1}k^n$
> 이므로 p도 ((다)) 이다.
> 따라서, p, q가 ((나)) 라는 가정에 모순이므로
> $\sqrt[n]{3}$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나) , (다) 에 알맞는 것을 차례대로 적으면?

① 유리수, 서로 다른 자연수,3의 배수

② 유리수, 서로소인 자연수, 3의 배수

③ 유리수, 서로 다른 자연수, 3의 배수

④ 무리수, 서로 다른 자연수, 3의 배수

⑤ 무리수, 서로소인 자연수, 홀수

해설

$\sqrt[n]{3}$을 (유리수) 라고 가정하면

$\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$($p$, q 는 (서로소인 자연수)) 로 놓을 수 있다.

$\sqrt[n]{3} = \frac{q}{p}$ 의 양변을 n제곱하여 정리하면

$3p^n = q^n \cdots$ ㉠

그런데, ㉠ 에서 q^n이 (3의 배수) 이므로

$q = 3k$(단, k 는 자연수)$\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $p^n = 3^{n-1}k^n$ 이므로 p도 (3의 배수) 이다.

따라서 p, q가 (서로소인 자연수) 라는 가정에 모순이므로 $\sqrt[n]{3}$ 은 무리수이다.