1. 8의 세제곱근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

해설

8의 세제곱근은 $x^3=8$을 만족하는 x의 값이므로
$x^3-8=0$에서
$(x-2)(x^2+2x+4)=0$
$\therefore\ x-2=0$ 또는 $x^2+2x+4=0$
$\therefore\ x=2$ 또는 $x=-1+\sqrt{3}i$ 또는 $x=-1-\sqrt{3}i$
따라서 8의 세제곱근은
$2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}i$

2. $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-5}} \times \left(-a^{\frac{2}{3}}\right)^4$ 을 간단히 하면? (단, $a > o$)

① a　② $a^{\frac{4}{3}}$　③ a^2　④ a^4　⑤ a^5

해설

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[3]{a^{-5}} \times \left(-a^{\frac{2}{3}}\right)^4 &= a^{\frac{2}{3}} \div a^{-\frac{3}{5}} \times a^{\frac{8}{3}} \\ &= a^{\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{8}{3}} \\ &= a^5\end{aligned}$$

3. $a>0, b>0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$$
$$= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}}$$
$$= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}$$
$$= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}$$

4. $\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$을 2^k 꼴로 나타낼 때 k는?

① $\frac{11}{12}$　② $\frac{11}{24}$　③ $\frac{3}{8}$　④ $\frac{23}{24}$　⑤ 1

해설

$$\sqrt{2\sqrt[3]{4\sqrt[4]{8}}}$$
$$=\left\{2\times(4\times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left\{2\times(2^2\times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left\{2\times(2^{\frac{11}{4}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=(2\times 2^{\frac{11}{12}})^{\frac{1}{2}}=(2^{\frac{23}{12}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{23}{24}}$$
$$\therefore k=\frac{23}{24}$$

5. $6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은?

① 9 ② 18 ③ 27 ④ 36 ⑤ 45

해설

$$\begin{aligned} 6^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} &= (2 \times 3)^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \times 2^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{3}} \times 3^{\frac{6}{3}} \\ &= 2 \times 3^2 \\ &= 18 \end{aligned}$$

6. $a>0$일 때, $\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}$을 간단히 하면?

① a　② $\sqrt{a}$　③ $a\sqrt[7]{a^5}$　④ $\sqrt[8]{a^5}$　⑤ $\sqrt[12]{a^7}$

해설

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt[4]{a^5}}=(a^{\frac{1}{2}+\frac{5}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$=(a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$=a^{\frac{7}{12}}=\sqrt[12]{a^7}$$

7. $x = 2$일 때, $x^{x^{x^x}}$ 의 값을 구하면?

① 2^2 ② 2^4 ③ 2^8 ④ 2^{16} ⑤ 2^{32}

해설

$$x^{x^{x^x}} = 2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

8. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 4$

ㄴ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = 25^{\sqrt{2}}$

ㄷ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ $(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 2^2 = 4$(참)

ㄴ $(5^{\sqrt{2}}) \times (5^{\sqrt{2}}) = (5\times5)^{\sqrt{2}} = 25^{\sqrt{2}}$(참)

ㄷ $9^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (3^2)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 3^{\sqrt{2}}$(참)

9. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[3]{-64}=-4$

② $\sqrt[4]{81}=3$

③ $\sqrt[5]{-32}=-2$

④ $-\sqrt[3]{0.008}=-0.2$

⑤ $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=1$

해설

⑤$(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{3^2}-\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})$
$=\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{2^3}=5$

10. $a > 0$일 때, $\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3}$을 간단히 하면?

① 2 ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt[4]{a^3}$ ④ $\sqrt[4]{a^3}$ ⑤ $\sqrt[4]{4a^3}$

해설

$$\sqrt[4]{16a\sqrt{a}} \div \sqrt[8]{a^3} = \left(2^4 a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \div a^{\frac{3}{8}} = 2a^{\frac{3}{8}-\frac{3}{8}} = 2a^0 = 2$$

11. $x > 0$, $x \neq 1$일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[8]{x^k}$을 만족하는 자연수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

12. 양의 실수 a에 대하여 $\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은?(단, $a \neq 1$)

① $\sqrt[10]{a}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt[10]{a}}$ ③ 1 ④ $\dfrac{1}{\sqrt[15]{a}}$ ⑤ $\sqrt[10]{a}$

해설

$$\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}}$$

$$= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[15]{a}}{\sqrt[10]{a}} \times \frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[15]{a}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a}}$$

13. $x \geq 0$일 때, $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$를 간단히 하면?

① $x\sqrt{x}$ ② $x\sqrt[4]{x}$ ③ $\sqrt[8]{x}$ ④ $\sqrt[8]{x^3}$ ⑤ $\sqrt[8]{x^7}$

해설

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

$= \sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}}$

$= (x^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{7}{8}}$

14. $\sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}}$ 를 간단히 하여 $\sqrt[n]{4}$ 로 나타낼 때, 자연수 n 의 값은?

① 4 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 18

해설

$$\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2^4}}{\sqrt[3]{5}}} \times \sqrt[9]{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2^6}}} = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{2^4}}}{\sqrt[6]{\sqrt[3]{5}}} \times \frac{\sqrt[9]{\sqrt{5}}}{\sqrt[9]{\sqrt[3]{2^6}}}$$

$$= \frac{\sqrt[12]{2^4}}{\sqrt[18]{5}} \times \frac{\sqrt[18]{5}}{\sqrt[27]{2^6}}$$

$$= \frac{\sqrt[3\times4]{2^4}}{\sqrt[9\times3]{2^{3\times2}}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[9]{2^3}}{\sqrt[9]{2^2}} = \sqrt[9]{\frac{2^3}{2^2}}$$

$$= \sqrt[9]{2} = \sqrt[18]{4}$$

$\therefore n = 18$

15. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$ 이다. 이때, $m-n$의 값을 구하여라. (단, m, n은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}}$

$= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$

$n = 7,\ m = 8$

$8 - 7 = 1$

16. $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{4} \times \sqrt[6]{6} = 2^a \times 3^b$ 일 때 $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

해설

$$2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{4}} \times (2 \times 3)^{\frac{1}{6}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}$$
$$= 2^{\frac{7}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}$$
$$a = \frac{7}{6},\ b = \frac{1}{2}$$
$$\therefore a+b = \frac{7+3}{6} = \frac{5}{3}$$

17. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$을 $\sqrt{2^k}$의 꼴로 나타낼 때, 상수 k의 값은?

① $\dfrac{5}{12}$ ② $\dfrac{5}{6}$ ③ $\dfrac{11}{12}$ ④ $\dfrac{7}{6}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

해설

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ 을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{5}{4} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$$

$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k$ 이므로 $\dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{2}k$

$$\therefore\ k = \frac{5}{6}$$

18. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$$8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5$$

$\therefore x = 5$

19. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k의 값을 구하여라.(단. $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로

$k = 5$

20. $x > y > 0$ 일 때, $\dfrac{x^y y^x}{y^y x^x}$ 를 간단히 하면?

① $(x-y)^{\frac{y}{x}}$ ② $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{x-y}$ ③ 1

④ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{y-x}$ ⑤ $(x-y)^{\frac{x}{y}}$

해설

$$x^{y-x} \cdot y^{x-y} = \left(\frac{x}{y}\right)^{y-x}$$

21. 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{a+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7}{a^{-3}+a^{-4}+a^{-5}+a^{-6}+a^{-7}+a^{-8}+a^{-9}}$$

① a^8　② a^9　③ a^{10}　④ a^{11}　⑤ a^{12}

해설

분자, 분모에 a^{10}을 곱하면

$$\frac{a^{10}\times(a+a^2+\cdots+a^7)}{a^7+a^6+\cdots+a^2+a}=a^{10}$$

22. $(3-\sqrt{2})^{-1}\times(11+6\sqrt{2})^{-\frac{1}{2}}=a$일 때, $\frac{1}{a}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$a=\frac{1}{3-\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{11+2\sqrt{18}}}$$

$$=\frac{1}{(3-\sqrt{2})\times(3+\sqrt{2})}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore\frac{1}{a}=\frac{1}{7}$$

23. 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{\frac{7}{8}}$ ㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2$

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = 9$

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} = 2^{\frac{7}{8}}$

$\therefore$ 참

㉡ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8$ $\therefore$ 거짓

㉢ $(3^{\sqrt{2}}) \times (3^{\sqrt{2}}) = (3^{\sqrt{2}})^2 = 3^{2\sqrt{2}}$ $\therefore$ 거짓

24. $x=2$ 일 때, $(x^x)^{x^x}$ 는?

① 16 ② 64 ③ 256

④ 1024 ⑤ 65536

해설

$(2^2)^{2^2}=(2^2)^4=2^{16}$

$2^{10}=1024,\ 2^6=64$ 이므로

$\therefore\ 2^{16}=1024\times 64=65536$

25. 다음 중 옳은 것을 고르면?

① 8의 세제곱근은 $\sqrt[3]{8}$ 한 개다.

② -1의 세제곱근 중 실수는 존재하지 않는다.

③ n이 홀수일 때, 5의 n제곱근 중 실수인 것은 한 개다.

④ n이 짝수일 때, 16의 n제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

⑤ -81의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 3이다.

해설

$x^n = a$인 실수 x의 개수는 다음과 같다.

(i) n이 홀수일 때, 실수 x는 $\sqrt[n]{a}$로 1개 이다.

(ii) n이 짝수일 때,

$a > 0 \rightarrow$ 실수 x는 $\pm\sqrt[n]{a}$로 2개 이다.

$a = 0 \rightarrow$ 실수 x는 0이므로 1개 이다.

$a < 0 \rightarrow$ 실수 x는 존재하지 않는다.

① $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개

② $n = 3$이므로 실수인 세제곱근은 1개

③ n이 홀수이므로 실수인 n제곱근은 1개

④ n이 짝수이고 $16 > 0$ 이므로 실수인 n제곱근은 2개

⑤ $n = 4$ 이고, $-81 < 0$이므로 실수인 n제곱근은 존재하지 않는다.

26. $\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$를 $2^{\frac{q}{p}}$로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p, q는 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 53

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{4\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} &= \sqrt{4\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4\times 2}}} \\ &= \sqrt{4\sqrt[12]{2^5}} = \sqrt{2^2\cdot\sqrt[12]{2^5}} \\ &= \sqrt{\sqrt[12]{2^{24}\times 2^5}} = \sqrt[24]{2^{29}} = 2^{\frac{29}{24}}\end{aligned}$$

따라서 $P=29$, $q=24$이므로 $p+q=53$

27. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\sqrt[3]{3}=a,\ \sqrt[3]{2}=b$라고 하면

$(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^3+b^3$

$=3+2=5$

28. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$$

29. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ ② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{34}$ ③ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$ ⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$

이므로 세 수를 12제곱하면

$7^4 = 2401$, $10^3 = 1000$, $34^2 = 1156$

따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면

$\therefore$ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

30. 세 수 $A = \sqrt[3]{\sqrt{100}}, B = \sqrt{5}, C = \sqrt[3]{\sqrt{121}}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$

④ $B < C < A$ ⑤ $C < A < B$

해설

$A = \sqrt[3]{\sqrt{100}} = \sqrt[3]{100^{\frac{1}{2}}} = 100^{\frac{1}{6}}$

$B = \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{6}} = 125^{\frac{1}{6}}$

$C = \sqrt[3]{\sqrt{121}} = \sqrt[3]{121^{\frac{1}{2}}} = 121^{\frac{1}{6}}$

이므로 A, B, C 의 대소 관계는 $A < C < B$ 이다

31. $P = \dfrac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2}$에 대하여 $\sqrt[4]{P}$의 값은?

① $3\sqrt[4]{9}$ ② $9\sqrt[4]{3}$ ③ $9\sqrt[4]{9}$ ④ $9\sqrt[4]{27}$ ⑤ 81

해설

$$P = \frac{9^3 \cdot 81^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}}{27^{-6} \cdot 9^2} = \frac{(3^2)^3 \cdot (3^4)^{-3} \cdot 3^3}{(3^3)^{-6} \cdot (3^2)^2}$$

$$= \frac{3^6 \cdot 3^{-12} \cdot 3^3}{3^{-18} \cdot 3^4}$$

$$= \frac{3^{-3}}{3^{-14}}$$

$$= 3^{-3-(-14)} = 3^{11}$$

$$\therefore \sqrt[4]{P} = \sqrt[4]{3^{11}} = 9\sqrt[4]{3^3} = 9\sqrt[4]{27}$$

32. $10^{0.31} = 2$, $10^{1.04} = 11$로 계산할 때, $10^{a} = 275$를 만족하는 a의 값은?

① 2.34　　② 2.38　　③ 2.42　　④ 2.46　　⑤ 2.50

해설

$5 = \dfrac{10}{2} = \dfrac{10}{10^{0.31}} = 10^{1-0.31} = 10^{0.69}$이므로

$275 = 5^2 \times 11 = (10^{0.69})^2 \times 10^{1.04}$

$= 10^{1.38} \times 10^{1.04} = 10^{2.42}$

$\therefore\ a = 2.42$

33. $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n의 개수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 0

해설

$\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{n}} = 3^{\frac{-3}{n}}$ 이 자연수

$n = -1$일때, 3^3

$n = -3$일때, 3

$\Rightarrow 2$개

34. $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\frac{5}{2}$ 일 때, $a-\frac{1}{a}$ 의 값은?(단, $a>1$)

① $\frac{15}{4}$ ② 5 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 15 ⑤ 1

해설

곱셈 공식의 변형 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ 에 의하여

$$\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)^2-4=\left(\frac{5}{2}\right)^2-4=\frac{25}{4}-4=\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}(\because a>1)$$

$$\therefore a-\frac{1}{a}=\left(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}$$

35. $2^x + \dfrac{1}{2^x} = 2$ 일 때, $8^x + \dfrac{1}{8^x}$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$$8^x + \frac{1}{8^x} = (2^x)^3 + \left(\frac{1}{2^x}\right)^3$$

$$= \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^3 - 3 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x}\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 = 2$$

36. $x = \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}$ 의 값은?

① $\sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ② $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ③ $\sqrt[4]{2} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

④ $\sqrt[4]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ⑤ $\sqrt[8]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}}$

해설

$$x^2 + 4 = 2^{\frac{1}{4}} + 2 + 2^{-\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$\therefore\ \sqrt{x^2+4} = 2^{\frac{1}{8}} + 2^{-\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2} + \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$$

37. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$일 때, $a + a^{-1}$의 값을 구하여라.(단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^2$

$a + a^{-1} + 2 = 16$

$\therefore a + a^{-1} = 14$

38. 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,\ n)$이라 할 때, 다음 물음에 답하여라. (단, n은 2이상의 자연수 이다.)
$f(5,\ -5)+f(0,\ 5)+f(0,\ 6)+f(5,\ 6)$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

(i) $a<0$일 때,
n이 짝수이면 $f(a,\ n)=0$, n이 홀수이면 $f(a,\ n)=1$이므로
$f(5,\ -5)=1$
(ii) $a=0$일 때,
$f(a,\ n)=1$이므로 $f(0,\ 5)=f(0,\ 6)=1$
(iii) $a>0$일 때,
n이 짝수이면 $f(a,\ n)=2$이므로 $f(5,\ 6)=2$
$f(5,\ -5)+f(0,\ 5)+f(0,\ 6)+f(5,\ 6)=1+1+1+2=5$

39. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ n이 홀수일 때, -5의 실수인 n제곱근은 $-\sqrt[n]{5}$이다.

ㄴ $2^{\sqrt{2}-1}2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=4^{\sqrt{2}}$

ㄷ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}}=\left[\left\{(\sqrt{3})^2\right\}^2\right]^2$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ n이 홀수일 때, -5의 실수인 n제곱근은 $\sqrt[n]{-5}=-\sqrt[n]{5}$이다. (참)

ㄴ $2^{\sqrt{2}-1}2^{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=4^{\sqrt{2}}=2^{\sqrt{2}-1}2^{\sqrt{2}+1}$

$=2^{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{2}+1)}$

$=2^{2\sqrt{2}}=(2^2)^{\sqrt{2}}=4^{\sqrt{2}}$(참)

ㄷ $(\sqrt{3})^{2^{2^2}}=(\sqrt{3})^{2^4}=(\sqrt{3})^{16}=3^8$

$\left[(\sqrt{3})^{2^2}\right]^2=(3^2)^2=3^4$

$\therefore (\sqrt{3})^{2^{2^2}}\neq\left[(\sqrt{3})^{2^2}\right]^2$ (거짓)

40. 다음 중 옳은 것은?

① $a>0$ 이고 $m, n(m>0, n>0)$ 이 정수일 때, $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[n]{a^m}$ 이다.

② $a>0$ 일 때, $(\sqrt[3]{-a})^3=-a$ 이다.

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m]{a\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m+n]{a}$ (단, $a>0$)

해설

① $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$

③ $(-3)^2$ 의 제곱근은 ± 3 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3 의 n 제곱근 중에서 실수인 것은 $\pm\sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ $\sqrt[m+n]{a}=\sqrt[m]{a}, \sqrt[n]{a}$

41. 세 수 $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{11}$, $\sqrt[6]{128}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{5} < \sqrt[3]{11} < \sqrt[6]{128}$

② $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{128}$

③ $\sqrt{5} < \sqrt[6]{128} < \sqrt[3]{11}$

④ $\sqrt[6]{128} < \sqrt[3]{11} < \sqrt{5}$

⑤ $\sqrt[6]{128} < \sqrt{5} < \sqrt[3]{11}$

해설

$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{11} = 11^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[6]{128} = 128^{\frac{1}{6}}$

이 때, 지수의 분모를 같게 만들면

$5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}}, 11^{\frac{1}{3}} = 11^{\frac{2}{6}}, 128^{\frac{1}{6}}$

지수의 분모가 6으로 모두 같으므로

$5^3, 11^2, 128$ 의 대소를 비교한다.

$5^3 = 125, 11^2 = 121, 128$에서

$11^2 < 5^3 < 128 \quad \therefore \sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < \sqrt[6]{128}$

42. 다음 네 수의 크기를 비교하면?

㉠ $\sqrt{2}$	㉡ $\sqrt{3}$	㉢ $\sqrt[3]{4}$	㉣ $\sqrt[4]{5}$

① ㉠ < ㉡ < ㉢ < ㉣

② ㉣ < ㉢ < ㉠ < ㉡

③ ㉣ < ㉢ < ㉡ < ㉠

④ ㉠ < ㉣ < ㉢ < ㉡

⑤ ㉡ < ㉠ < ㉢ < ㉣

해설

㉠ < ㉡

$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} > (\sqrt[3]{4})^3 = 4$

∴ ㉢ < ㉠ < ㉡

$(\sqrt[3]{4})^{12} = 4^4 = 256 > (\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$

∴ ㉣ < ㉢ < ㉠ < ㉡

43. 세 수 $A = \sqrt[3]{-3}$, $B = \sqrt[5]{-6}$, $C = \sqrt[15]{-225}$ 에 대하여 대소 관계를 바르게 나타넨 것은?

① $A < B < C$　② $A < C < B$　③ $B < C < A$

④ $C < A < B$　⑤ $C < B < A$

해설

$A = \sqrt[3]{-3}$, $B = \sqrt[5]{-6}$, $c = \sqrt[15]{-225}$ 에서

3, 5, 15 의 최소공배수는 15 이므로 각 수를 모두 15 제곱한다.

$$A^{15} = (\sqrt[3]{-3})^{15} = \left\{(\sqrt[3]{-3})^{3}\right\}^{5} = (-3)^{5} = -243$$

$$B^{15} = (\sqrt[5]{-6})^{15} = \left\{(\sqrt[5]{-6})^{5}\right\}^{3} = (-6)^{3} = -216$$

$$C^{15} = (\sqrt[15]{-225})^{15} = -225$$

이므로 $A^{15} < C^{15} < B^{15}$

$\therefore A < C < B$

44. n이 정수일 때, $\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이 나타낼 수 있는 모든 자연수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 78

해설

$$\left(\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{n}} = (64^{-1})^{\frac{1}{n}} = 64^{-\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{6}{n}}$$

$2^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되는 정수 n

$n = -1$ 일 때, 2^6

$n = -2$ 일 때, 2^3

$n = -3$ 일 때, 2^2

$n = -6$ 일 때, 2

$\therefore\ 2 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 2 + 4 + 8 + 64 = 78$

45. $2^{2x}+2^{-2x}=5$ 일 때, $2^{3x}+2^{-3x}$ 의 값은?

① 10　　② $4\sqrt{7}$　　③ 12　　④ 15　　⑤ $6\sqrt{7}$

해설

$(2^{2x}+2^{-2x})^3$

$=2^{6x}+2^{-6x}+3\cdot 2^{2x}\cdot 2^{-2x}(2^{2x}+2^{-2x})$

$=2^{6x}+2^{-6x}+3\times 5$

$2^{6x}+2^{-6x}=5^3-15=110$

$\therefore\ (2^{3x}+2^{-3x})^2$

$=2^{6x}+2^{-6x}+2$

$=112$

$2^{3x}+2^{-3x}>0$ 이므로 $2^{3x}+2^{-3x}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$

46. $x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 일 때, $2x^3 + 6x + 1$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ 의 양변을 세 제곱하면

$$x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$= (2^{\frac{1}{3}})^3 - (2^{-\frac{1}{3}})^3 - 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{3}}(2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}})$$

$$= 2 - 2^{-1} - 3(2^{\frac{1}{3}} - 2 - \frac{1}{3})$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - 3x$$

따라서 $x^3 + 3x = \frac{3}{2}$ 이므로

$$2x^3 + 6x + 1 = 2(x^3 + 3x) + 1 = 2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = 4$$

47. $x=2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}$ 일 때, x^3-3x-1의 값은?

① $\frac{13}{4}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

해설

$2^{\frac{2}{3}}=a$라 하면 $2^{-\frac{2}{3}}=a^{-1}$ $\therefore x=a+a^{-1}$

$x^2=(a+a^{-1})^2=a^2+2aa^{-1}+a^{-2}=a^2+2+a^{-2}$ 이므로

$x^3-3x-1=x(x^2-3)-1$

$=(a+a^{-1})(a^2-1+a^{-2})-1$

$=a^3+a^{-3}-1$

$=2^2+2^{-2}-1$

$=4+\frac{1}{4}-1=\frac{13}{4}$

해설

$$x^3=(2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}})^4$$
$$=2^2+2^{-2}+3\cdot 2^{\frac{2}{3}}\cdot 2^{-\frac{2}{3}}(2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}})$$
$$=4+\frac{1}{4}+3x$$

$\therefore x^3-3x=4+\frac{1}{4}$

$\therefore x^3-3x-1=\frac{13}{4}$

48. 거듭제곱근의 성질에 대하여 옳은 것을 다음 보기에서 모두 고른 것은?

보기

㉠ 8의 세제곱근은 2, $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$이다.

㉡ n이 홀수일 때, -2의 n제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[n]{2}$ 뿐이다.

㉢ $x>1$이면 $\sqrt[3]{(1-x)^3}=x-1$이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠ $x^3=8$에서 $x^3-8=0$

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2,\ x=-1\pm\sqrt{3}i$(참)

㉡ n이 홀수일 때,

-2의 n제곱근 중 실수인 것은

$$\sqrt[n]{-2}=\sqrt[n]{(-1)\times 2}=\sqrt[n]{(-1)^n\times 2}\ (참)$$
$$=-\sqrt[n]{2}$$

㉢ $x>1$일 때, $\sqrt[3]{(1-x)^3}=x-1$(거짓)

따라서, 옳은 것은 ㉠,㉡이다.

49. 다음은 $n \geq 2$인 임의의 자연수 n에 대하여 $\sqrt[n]{3}$이 무리수임을 증명한 것이다.

> $\sqrt[n]{3}$을 ((가)) 라고 가정하면
> $\sqrt[n]{3} = \dfrac{q}{p}$($p$, q는 (나)) 로 놓을 수 있다.
> $\sqrt[n]{3} = \dfrac{q}{p}$의 양변을 n제곱하여 정리하면
> $3p^n = q^n \cdots$ ㉠
> 그런데 ㉠에서 q^n이 ((다))) 이므로
> $q = 3k$ (단, k는 자연수) $\cdots$ ㉡
> ㉡을 ㉢에 대입하여 정리하면 $p^n = 3^{n-1}k^n$
> 이므로 p도 ((다)) 이다.
> 따라서, p, q가 ((나)) 라는 가정에 모순이므로
> $\sqrt[n]{3}$은 무리수이다.

위의 증명에서 (가), (나) , (다) 에 알맞는 것을 차례대로 적으면?

① 유리수, 서로 다른 자연수,3 의 배수

② 유리수, 서로소인 자연수, 3 의 배수

③ 유리수, 서로 다른 자연수, 3 의 배수

④ 무리수, 서로 다른 자연수, 3 의 배수

⑤ 무리수, 서로소인 자연수, 홀수

해설

$\sqrt[n]{3}$을 (유리수) 라고 가정하면

$\sqrt[n]{3} = \dfrac{q}{p}$($p$, q 는 (서로소인 자연수)) 로 놓을 수 있다.

$\sqrt[n]{3} = \dfrac{q}{p}$의 양변을 n제곱하여 정리하면

$3p^n = q^n \cdots$ ㉠
그런데, ㉠ 에서 q^n이 (3 의 배수) 이므로
$q = 3k$(단, k 는 자연수)$\cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $p^n = 3^{n-1}k^n$ 이므로 p도 (3 의 배수) 이다.
따라서 p, q가 (서로소인 자연수) 라는 가정에 모순이므로 $\sqrt[n]{3}$ 은 무리수이다.