1. 두 점 $\mathrm{A}(4, -3), \mathrm{B}(a, 3)$ 사이의 거리가 $6\sqrt{2}$ 일 때, 양수 a 의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

두 점 $\mathrm{A}(4, -3), \mathrm{B}(a, 3)$ 에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(a-4)^2 + (3+3)^2}$

$= \sqrt{a^2 - 8a + 52}$

$= 6\sqrt{2}$

위의 식의 양변을 제곱하면 $a^2 - 8a + 52 = 72$

$a^2 - 8a - 20 = 0$

$(a-10)(a+2) = 0$

$\therefore a = 10 (\because a > 0)$

2. 두 점 $\mathrm{A}(-1,4), \mathrm{B}(6,3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 $\mathrm{P}(a,b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\mathrm{P}=(a,0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서
$(a+1)^2+4^2=(a-6)^2+9$, $a=2$
$\therefore$ $\mathrm{P}=(2,0)$
$a+b=2$

3. 세 점 A(3, 2), B(−2, −3), C(a, b)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표 G(1, 1)일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\mathrm{G}\left(\frac{3+(-2)+a}{3},\ \frac{2+(-3)+b}{3}\right)=G(1,\ 1)\text{ 이므로,}$$

$$\frac{3+(-2)+a}{3}=1,\ 3+(-2)+a=3,\ a=2$$

$$\frac{2+(-3)+b}{3}=1,\ 2+(-3)+b=3,\ b=4$$

$\therefore\ a+b=6$

4. 일차함수 $\sqrt{3}x - y = 1$ 의 기울기와 y 절편, x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 : $\underline{\ \ }^{\circ}$

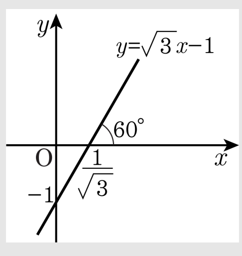
▷ 정답 : 기울기 $\sqrt{3}$

▷ 정답 : y 절편 -1

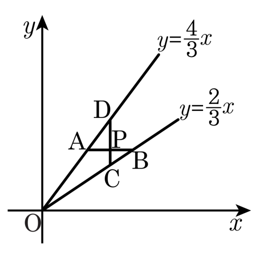
▷ 정답 : $60\,\underline{^{\circ}}$

해설

$y = \sqrt{3}x - 1$ 에서
기울기 $\sqrt{3}$, y 절편 -1, x 축의 양의 방향과 이루는 각 60°



5. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$

6. 세 점 A $(2,\ 1)$, B $(-k+1,\ 3)$, C $(1,\ k+2)$ 가 같은 직선위에 있도록 하는 실수 k 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 점 $\mathrm{A}(2,1)$, $\mathrm{B}(-\mathrm{k}+1,3)$, $\mathrm{C}(1,\mathrm{k}+2)$ 가 같은 직선 위에 있으려면
직선 AB 와 AC 의 기울기가 같아야 하므로

$$\frac{3-1}{(-k+1)-2}=\frac{(k+2)-1}{1-2}$$

$$\frac{2}{-k-1}=\frac{k+1}{-1},$$

$(k+1)^2=2$,

$\therefore\ k=-1\pm\sqrt{2}$ 따라서 구하는 합은 $(-1+\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2$

7. 세 점 A(1, 2), B(2, −3), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC 에 대하여 점 A를 지나고, $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$　② $y=\frac{1}{2}x+5$　③ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
④ $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$　⑤ $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

해설

점 A를 지나고 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점은 $\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 (3, 1) 이므로

두 점 (1, 2), (3, 1) 을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\frac{1-2}{3-1}(x-1)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

8. 다음 연립방정식이 $x=y=0$ 이외의 해를 가질 때, k의 값은?

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+y=kx \end{cases}$$

① $\frac{5}{2}$　② $-\frac{5}{2}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $-\frac{3}{2}$　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$x+2y=0\cdots$㉠,
$3x+y=kx\cdots$㉡
㉠ $-$ ㉡ $\times 2$ 하면 $(2k-5)x=0$
㉠ $\times (3-k)$ $-$ ㉡ 하면 $(2k-5)y=0$
따라서 $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
$x=y=0$
$k=\frac{5}{2}$ 일 때
㉠, ㉡는 $x+2y=0$ 이 되어 부정
(참고) $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
두 직선은 원점에서 만나고,
$k=\frac{5}{2}$ 일 때 두 직선은 모두
원점을 지나면서 일치한다.
결국 기울기가 같으면 되므로 처음부터
$-\frac{1}{2}=k-3$ 으로 해도 된다.

9. 세 직선 $2x-y-4=0$, $x-2y-2=0$, $y=ax+2$ 가 오직 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

해설

세 직선이 한 점에서 만나려면 두 직선의 교점을 나머지 한 직선이 지나야 한다.

$2x-y-4=0 \cdots$ ㉠

$x-2y-2=0 \cdots$ ㉡

$y=ax+2 \quad \cdots$ ㉢이라 할 때,

㉠, ㉡의 교점이 ㉢위에 있으면, 한 점에서 만나므로

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $x=2$, $y=0$

두 직선의 교점 $(2, 0)$ 이 직선 $y=ax+2$ 를 지나면 한 점에서 만나므로

$0=2a+2$, $2a=-2$

$\therefore \quad a=-1$

10. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 $(a,\ b)$와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a+b)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(a,\ b)$가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점$(a,\ b)$와 직선 사이의 거리를 l이라 하면,

$a = b^2 + 1 \cdots\cdots$ ㉠

$l = \dfrac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \cdots$ ㉡

㉠를 ㉡에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$일 때 l이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \dfrac{5}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{4}$이므로

$\therefore\ 4(a+b) = 7$

11. 두 점 A$(-5,\ 1)$, B$(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $y=-x$ 위에 있는 점의 좌표는?

① $\left(\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ ② $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$
④ $\left(\frac{5}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$

해설

구하는 점을 $\mathrm{P}(a,\ -a)$라 하면 $(\because\ y=-x)$

$\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$

$(a+5)^2+(a+1)^2=(a-4)^2+(a+5)^2$

$\Rightarrow a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(a,-a)=\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$

12. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(a, b)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$의 무게중심의 좌표가 $(0, 2)$일 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

① 정삼각형

② 직각삼각형

③ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형

④ $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CA}}$인 이등변삼각형

⑤ 알 수 없다.

해설

무게중심의 좌표가 $(0, 2)$이므로

$\frac{2+(-2)+a}{3} = 0, \frac{4+2+b}{3} = 2$

$\therefore a = 0, b = 0$

$\therefore \mathrm{C}(0, 0)$

$\triangle\mathrm{ABC}$의 세변의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{\{0-(-2)\}^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CA}} = \sqrt{(0-2)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$는 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CA}}$인 이등변삼각형이다.

13. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{P}(0, b)$, $\mathrm{Q}(a, 0)$, $\mathrm{B}(5, 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

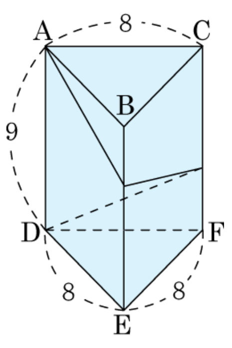
점 $\mathrm{A}\,(1, 2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1, 2)$, 점 $\mathrm{B}(5, 1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5, -1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45}$

따라서 $k = \sqrt{45}$ 이므로 $k^2 = 45$

14. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

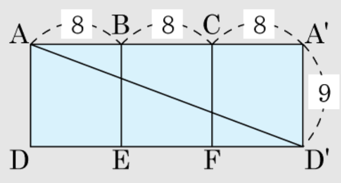


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{\mathrm{AD'}} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$



15. $\triangle ABC$ 의 무게중심이 $(3,1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R 이라 할 때, $\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(2,\ 3)$　② $(1,\ 3)$　③ $(3,\ 2)$
④ $(2,\ 2)$　⑤ $(3,\ 1)$

해설

세 점을 $(a,d), (b,e), (c,f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3,1)$ 이므로,
$\dfrac{a+b+c}{3}=3,\ \dfrac{d+e+f}{3}=1 \cdots$ ㉠
변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는
$$P\left(\frac{2a+3b}{3+2}, \frac{2d+3e}{3+2}\right)=\left(\frac{2a+3b}{5}, \frac{2d+3e}{5}\right)$$
$$Q\left(\frac{2b+3c}{3+2}, \frac{2e+3f}{3+2}\right)=\left(\frac{2b+3c}{5}, \frac{2e+3f}{5}\right)$$
$$R\left(\frac{2c+3a}{3+2}, \frac{2f+3d}{3+2}\right)=\left(\frac{2c+3a}{5}, \frac{2f+3d}{5}\right)$$ 이며,
$\triangle PQR$ 의 무게중심의 좌표는
$$\left(\frac{5(a+b+c)}{5\cdot 3}, \frac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$$
$$=\left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{d+e+f}{3}\right)$$
$\therefore$ ㉠에 의해 $(3,\ 1)$

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore (3,\ 1)$

16. 어떤 시험 결과, 최저점은 25 점, 최고점은 160 점이었다. 이 점수를 환산식 $y = ax + b$에 의하여 최저점을 10 점, 최고점을 100 점으로 고치려고 한다. 처음의 100 점은 나중의 몇 점으로 환산되겠는가?

① 30　　② 40　　③ 50　　④ 60　　⑤ 70

해설

$25a + b = 10$, $160a + b = 100$ 이므로 두 식을 연립한다.

$\Rightarrow \quad a = \frac{2}{3} \quad b = -\frac{20}{3}$

$\therefore$ 100 점을 환산하면, $\frac{2}{3} \times 100 - \frac{20}{3} = 60$

17. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

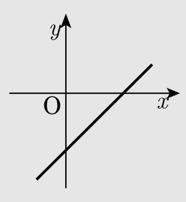
$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

18. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : ______사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설



$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 조건에서

$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

19. 두 점 A$(-1,\ 4)$, B$(3,\ 2)$ 을 이은 선분 AB 의 수직이등분선 위에 있는 점을 고르면?

① $(-2,\ 5)$ ② $(1,\ 2)$ ③ $(4,\ 9)$
④ $(5,\ -7)$ ⑤ $(7,\ -15)$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 방정식을 구해보면,
$y=\dfrac{2-4}{3-(-1)}(x-3)+2 \quad \therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$
$\therefore$ 수직이등분성의 기울기는 2 이고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점 을 지난다.
$\Rightarrow\ y=2\left(x-\dfrac{-1+3}{2}\right)+\dfrac{4+2}{2}=2x+1$
$\Rightarrow$ 점 $(4,\ 9)$ 를 지난다.

20. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a + b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2 + x - 2)k + (1 - y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x + 2 = 0,\ x^2 + x - 2 = 0,\ 1 - y = 0$

$\therefore x = -2,\ y = 1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a = -2,\ b = +1$

$\therefore\ a + b = -1$

21. 평행한 두 직선 $ax+by=1$, $ax+by=2$ 사이의 거리는?

① $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　② $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　③ $\dfrac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$　　⑤ $\dfrac{4}{\sqrt{a^2+b^2}}$

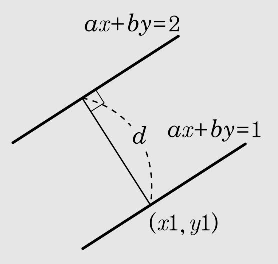
해설

두 직선은 서로 평행하므로 직선 $ax+by=1$
위의 한 점을 (x_1, y_1) 이라 놓으면
$ax_1+by_1=1$ 점 (x_1, y_1) 에서
직선 $ax+by=2$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|ax_1+by_1-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|1-2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



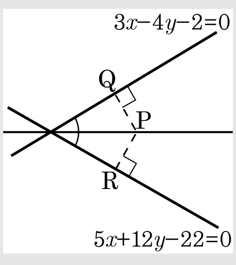
22. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$\dfrac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

23. 점 A$(6,\ 2)$와 직선 $x+2y-2=0$ 위를 움직이는 점 P가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}$를 $1\ :\ 3$으로 내분하는 점의 자취는?

① $x-2y-8=0$　② $x+2y-8=0$　③ $x-2y+8=0$
④ $x+2y+8=0$　⑤ $x-2y=0$

해설

P $(a,\ b)$라 하면 $a+2b-2=0$ ⋯㉠
$\overline{\mathrm{AP}}$의 $1\ :\ 3$ 내분점을 Q $(x,\ y)$라 하면

$$\mathrm{Q}(x,\ y)=\left(\frac{a+18}{1+3},\frac{b+6}{1+3}\right)$$

$$x=\frac{a+18}{1+3}\ ,\ y=\frac{b+6}{1+3}$$

$a=4x-18\ ,\ b=4y-6$
㉠에 대입하면,
$4x-18+2(4y-6)-2=0 \Rightarrow x+2y-8=0$

24. 세 점 A$(6, 2)$ B$(0, -6)$, C$(7, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3, -2)$

$\therefore\ 3ab = -18$

25. 네 점 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{B}(3,\mathrm{a})$, $\mathrm{C}(\mathrm{b},4)$, $\mathrm{D}(2,8)$ 을 꼭짓점으로 하는 □ABCD 가 마름모가 되도록 하는 a,b 의 합을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

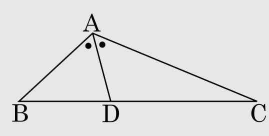
□ABCD 가 마름모이므로
$\overline{\mathrm{AD}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{BC}},\ \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 이다.
따라서 점 D는 점 A를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ (3+4,\ a+5) = (b,\ 4)$
$\therefore\ a = -1,\ b = 7$
$\therefore\ a+b = 6$

26. 세 점 $A(-2,\ 0)$, $B(-1,\ \sqrt{3})$, $C(1,\ -4)$ 를 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?

① 1 : 2 ② 1 : 3 ③ 1 : 4 ④ 2 : 3 ⑤ 2 : 5

해설

점 D 가 $\angle A$ 의 이등분선과 변 BC 의 교점이므로



$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{1+3} : \sqrt{9+16} = 2 : 5$

$\therefore\ \triangle ABD : \triangle ACD = \overline{BD} : \overline{DC} = 2 : 5$

27. 수직선 위의 세 점 $A(1), B(6), C(8)$ 과 동점 $P(x)$ 가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소가 될 때, 점 P 에서 점 A 까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$
$= (x-1)^2 + (x-6)^2 + (x-8)^2$
$= 3(x-5)^2 + 26$
따라서 $x = 5$ 일 때 최소가 된다.
점 $P(5)$ 에서 점 $A(1)$ 까지 거리는 $|5-1| = 4$ 이다.

28. 두 직선 $y = ax$와 $y = bx$가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$이다. 이때, $|a-b|$의 값은? (단, $a > 0,\ b < 0$)

① 1 ② 2 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 4

해설

$\mathrm{P}(2, 2a),\quad \mathrm{Q}(2, 2b)$

$\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad a + b = \frac{3}{2} \quad \cdots$ ㉠

$y = ax$와 $y = bx$가 서로 수직이므로

$a \times b = -1 \quad \cdots$ ㉡

$\therefore \quad (a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$이므로

$(a-b)^2 = \frac{9}{4} + 4$

$\Rightarrow \quad a - b = \frac{5}{2} \quad (\because\ a > 0,\ b < 0)$

29. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AB}}$를 2 : 1로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore a+2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

30. 좌표평면 위의 점 A$(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 B$(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y=m(x+1)$

$\therefore\ mx-y+m=0$

점 B$(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\dfrac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0$

$\therefore\ m=-\frac{1}{2}$

31. 두 점 A , B 에 대하여 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점이 $\mathrm{P}(2,\ 3)$, $1 : 2$ 로 외분하는 점이 $\mathrm{Q}(-2,\ 7)$ 일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1),\ \mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 라고 하면
P 는 내분점이고 Q 는 외분점이므로
$\frac{x_2+2x_1}{1+2}=2,\ \frac{y_2+2y_1}{1+2}=3,$
$\frac{-2x_1+x_2}{1-2}=-2,\ \frac{-2y_1+y_2}{1-2}=7$
위 식을 정리하면,
$2x_1+x_2=6 \ \cdots\cdots$ ①
$2y_1+y_2=9 \ \cdots\cdots$ ②
$-2x_1+x_2=2 \ \cdots\cdots$ ③
$-2y_1+y_2=-7 \ \cdots\cdots$ ④
①과 ③으로부터 $2x_2=8$
따라서 $x_2=4$ ①에 대입하면 $x_1=1$
②와 ④로부터 $2y_2=2$
따라서 $y_2=1$ ②에 대입하면 $y_1=4$
따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$ 이다.

32. 정점 $A(-2,\ 3)$과 직선 $y=2x-1$ 위의 동점 P를 잇는 선분 $\overline{AP}$를 $1:2$로 내분하는 점 Q의 자취의 방정식은?

① $y=x+\dfrac{13}{3}$ ② $y=2x+\dfrac{13}{3}$ ③ $y=3x+\dfrac{13}{3}$
④ $y=4x+\dfrac{13}{3}$ ⑤ $y=5x+\dfrac{13}{3}$

해설

점 $P(a,\ 2a-1)$, $Q(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{1\cdot a+2\cdot(-2)}{1+2}=\dfrac{a-4}{3}$

$y=\dfrac{1\cdot(2a-1)+2\cdot 3}{1+2}=\dfrac{2a+5}{3}$

여기에서 a를 소거하여 $x,\ y$의 관계식을 구하면

$\therefore\ y=2x+\dfrac{13}{3}$

33. 세 직선 $y = 2x + 1,\ 2y = x + 2,\ x + y = 4$ 로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① $\frac{2}{3}$　　② $\frac{3}{2}$　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

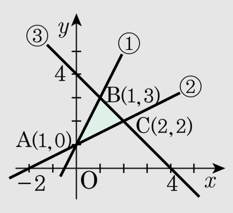
해설

$y = 2x + 1 \cdots$ ①

$y = \frac{1}{2}x + 1 \cdots$ ②

$y = -x + 4 \cdots$ ③

의 그래프를 그리면 아래와 같다.



A 의 좌표 : (0, 1)

B 의 좌표 : ① 과 ③ 을 연립하여 풀면 (1, 3)

C 의 좌표 : ② 와 ③ 을 연립하여 풀면 (2, 2)

$\therefore\ A(0,\ 1),\ B(1,\ 3),\ C(2,\ 2)$

$\therefore\ S = \frac{1}{2}\left|(0-1)2 + (1-2)1 + (2-0)3\right|$

$= \frac{1}{2}|-3 + 6| = \frac{3}{2}$