

1. 등식 $\frac{a}{1+i} + \frac{b}{1-i} = -5$ 를 만족하는 두 실수 $a+b$ 의 값을 구하시오
(단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$ 를 곱하면

$$a(1-i) + b(1+i) = -10, (a+b) + (b-a)i = -10$$

$$\therefore a+b = -10, b-a = 0$$

2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008}$ 을 간단히 하면?

① -1

② 0

③ 1

④ i

⑤ $-i$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{1-i} &= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2i}{2} = i \\ \therefore \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2008} &= i^{2008} \\ &= (i^4)^{502} = 1\end{aligned}$$

3. $(2-i)\bar{z} + 4iz = -1 + 4i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$z = a + bi$ 라 놓으면 $\bar{z} = a - bi$
 $(2-i)(a-bi) + 4i(a+bi) = -1 + 4i$
 $(2a-5b) + (3a-2b)i = -1 + 4i$
 $\therefore 2a-5b = -1 \cdots \textcircled{㉠}$
 $3a-2b = 4 \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 1$
 $\therefore z = 2 + i, \bar{z} = 2 - i$
 $\therefore z\bar{z} = (2+i)(2-i) = 2^2 - i^2 = 5$

4. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로

$x^2 + 4x = -5$

$\therefore x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

5. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ 을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$

② $x = \sqrt{2}$

③ $x = 0$

④ $x = 4 - \sqrt{2}i$

⑤ $x = 6$

해설

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

6. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(a+3)x + a^2 + 7 = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \geq 0$

② $-1 < a < 0$

③ $-2 < a < 0$

④ $a \geq -\frac{1}{3}$

⑤ $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$

해설

주어진 이차방정식이 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 7) \geq 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - a^2 - 7 \geq 0$$

$$6a + 2 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{1}{3}$$

7. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

8. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?
- ① -3 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
 $a = 4, b = 1$
 $\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
 $(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
 $\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
 $a = 4, b = 1$
 $\therefore ab = 4$

9. 복소수 $(1 - xi)(1 - i)$ 가 순허수가 되도록 실수 x 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

해설

$(1 - xi)(1 - i) = (1 - x) + (-1 - x)i$
순허수이려면 실수부가 $0 \Rightarrow 1 - x = 0$,
 $x = 1$

10. 방정식 $(a^2 - 3)x - 1 = a(2x + 1)$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(a^2 - 2a - 3)x = a + 1$$

$$(a - 3)(a + 1)x = a + 1$$

$\therefore a = 3$ 이면 해가 없다.

11. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x < 3$ 일 때,
 $-(x-3)-(x-4)=3, -2x=-5$
 $\therefore x=\frac{5}{2}$
ii) $3 \leq x < 4$ 일 때
 $(x-3)-(x-4)=2, 0 \cdot x=1$
 $\therefore$ 해가 없다.
iii) $x \geq 4$ 일 때
 $x-3+x-4=2, 2x=9$
 $\therefore x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2}, \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 한 근이 $-1+\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-1$

해설

$x^2+ax+b=0$ 에 $x=-1+\sqrt{2}$ 를 대입하여 정리하면
 $3-2\sqrt{2}+a(-1+\sqrt{2})+b=0$
 $-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$
 $-a+b+3=0$ 과 $a-2=0$ 에서 $a=2, b=-1$

13. x 에 대한 방정식 $ax^2 + 2x - a - 2 = 0$ 의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

- ① 오직 한 실근을 갖는다.
- ② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 실근을 갖는다.
- ⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a = 0$ 일 때 : $x = \frac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$$D' = 1 + a(a+2) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2 \geq 0$$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이 허근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

- ① $k < 0$
- ② $k > 0$
- ③ $0 < k < \frac{1}{4}$
- ④ $k \leq 0$
- ⑤ $k \geq 0$

해설

$x^2k - \left(x - \frac{1}{4}\right)k + \frac{1}{4} = 0$ 이
허근을 가져야 하므로
 x 에 대한 내림차순으로 정리하면
 $kx^2 - kx + \frac{1}{4}(k + 1) = 0$
 $D = (-k)^2 - 4k \cdot \frac{1}{4}(k + 1) < 0$
 $= k^2 - k^2 - k = -k < 0 \quad \therefore k > 0$
 $\therefore k > 0$

15. x 에 대한 2차 방정식 $x^2 - 2ax + a^2 + ka - 2k + b = 0$ 이 k 값에 관계없이
중근을 가질 때, $a + b$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 2

④ -2

⑤ 15

해설

중근이면 판별식이 0이다.

$$\Rightarrow D' = a^2 - (a^2 + ka - 2k + b) = 0$$

$$-ka + 2k - b = 0$$

$$k(2 - a) - b = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad b = 0 \quad a + b = 2$$

16. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 2(m - a + 1)x + m^2 + a^2 - 2b = 0$ 이 m 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 a, b 의 값을 정하면?

- ① $a = -1, b = \frac{1}{2}$ ② $a = 1, b = \frac{1}{2}$
③ $a = -1, b = -\frac{1}{2}$ ④ $a = 1, b = -\frac{1}{2}$
⑤ $a = 1, b = -1$

해설

$\frac{D}{4} = 0$ 이므로
 $(m - a + 1)^2 - (m^2 + a^2 - 2b) = 0,$
 m 에 관하여 정리하면
 $2(-a + 1)m - 2a + 2b + 1 = 0$
 m 에 관계없이 성립하므로
 $2(-a + 1) = 0, -2a + 2b + 1 = 0$
 $\therefore a = 1, b = \frac{1}{2}$

17. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 b 를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}, 4$ 를 얻었고, c 를 잘못 보아 $-1, 4$ 의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) b 를 잘못 본 경우
 a 와 c 는 옳으므로 두 근의 곱은
 $\frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{c}{a} \quad \therefore c = 2a$

(ii) c 를 잘못 본 경우
 a 와 b 는 옳으므로 두 근의 합은
 $-1 + 4 = 3 = -\frac{b}{a} \quad \therefore b = -3a$

(i), (ii)에서 주어진 방정식은
 $ax^2 - 3ax + 2a = 0$
 $a \neq 0$ 이므로 $x^2 - 3x + 2 = 0$
 $(x - 1)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$
따라서 근의 합은 3이다.

18. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z = \frac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① 7
- ② 6
- ③ 5
- ④ 4
- ⑤ 3

해설

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 의 한 근을 } w \text{ 라 하면, 다른 근은 } \bar{w} \text{ 이다.}$$
$$w + \bar{w} = -1, \quad w\bar{w} = 1$$
$$z\bar{z} = \frac{3w+1}{w+1} \cdot \frac{3\bar{w}+1}{\bar{w}+1}$$
$$= \frac{9w\bar{w} + 3(w + \bar{w}) + 1}{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1}$$
$$= 7$$

19. 복소수 $z = a + bi$ (a, b : 실수)에 대하여 $\langle z \rangle = b + ai$ 로 나타낸다.

$z = \frac{4+3i}{5}$ 일 때, $5z^5 \langle z \rangle^4$ 의 값을 구하면?

① $3 + 4i$

② $4 + 3i$

③ $5 + 4i$

④ $5 + 3i$

⑤ $4 + 5i$

해설

$$z \langle z \rangle = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

$$z = \frac{4+3i}{5} \text{ 이므로}$$

$$z \langle z \rangle = \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\} i = i$$

$$\begin{aligned} \therefore 5z^5 \langle z \rangle^4 &= 5z(z \langle z \rangle)^4 \\ &= 5 \left(\frac{4+3i}{5} \right) (i)^4 \\ &= 4 + 3i \end{aligned}$$

20. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

21. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면 ?

- ㉠ $\frac{2}{9}$ ㉡ $\frac{1}{3}$ ㉢ $\frac{4}{9}$ ㉣ $\frac{5}{9}$ ㉤ $\frac{2}{3}$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2 \\ &= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2 \text{가} \\ & x, y \text{의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면} \\ & D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2) \\ &= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8 \\ &= (1-4a)y^2 - 2y + 9 \text{에서} \end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

22. 이차방정식 $ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근의 차이가 $\sqrt{17}$ 이 되도록 하는 상수 a 의 값들의 합은?

- ① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

해설

$ax^2 + (a-3)x - 2a = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면,

$$\alpha + \beta = -\frac{a-3}{a}, \quad \alpha\beta = -2$$

문제의 조건에서 $|\alpha - \beta| = \sqrt{17}$

$$\therefore 17 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 + 8$$

$$\therefore \left(\frac{a-3}{a}\right)^2 = 9, \quad 8a^2 + 6a - 9 = 0$$

따라서, a 의 값들의 합은 $-\frac{3}{4}$

23. $\sqrt{\frac{b+1}{a-1}} = -\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}}$ 을 만족하는 실수 a, b 에 대하여 $\sqrt{(b-a+2)^2} + \sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{(2+b)^2} = 0$ 을 만족하는 점의 자취 $p(a, b)$ 의 기울기를 구하면?

- ① 1 ② -1 ③ 2 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$\sqrt{\frac{b+1}{a-1}} = -\frac{\sqrt{b+1}}{\sqrt{a-1}} \text{ 에서}$$

$$a-1 < 0, b+1 \geq 0 \therefore b \geq -1, a < 1$$

$$\therefore b-a+2 = b+1-(a-1) > 0$$

$$a-2 < 0, 2-a > 0$$

$$2+b > 0$$

$$\therefore (\text{준식}) = (b-a+2) + (2-a) + (b+2) \\ = 2b-2a+6$$

$$\therefore 2b-2a+6=0 \text{에서 } b=a-3$$

$$\therefore \text{기울기는 } 1$$

24. x 에 대한 이차방정식 $(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=0$ 의 두 근을 α, β 라 한다. $ab \neq 0, p \neq q$ 일 때, $\frac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}$ 의 값을 구하면?

- ① -5
- ② -4
- ③ -3
- ④ -2
- ⑤ -1

해설

$(x-p)(x-q)+a(x-q)+b(x-p)=(x-\alpha)(x-\beta)$

양변에 x 대신에 p, q 를 각각 대입하면

$a(p-q)=(p-\alpha)(p-\beta)$

$b(q-p)=(q-\alpha)(q-\beta)$ 이므로

$\frac{a(q-\alpha)(q-\beta)}{b(p-\alpha)(p-\beta)}=\frac{a \cdot b(q-p)}{b \cdot a(p-q)}=-1$

25. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $a > 0$, $b > 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, 다음 설명 중 옳은 것은?
- ① 두 근은 모두 음이다.
 - ② 음근을 가질 수 없다.
 - ③ 적어도 한 개의 음근을 갖는다.
 - ④ 두 근은 모두 양이다.
 - ⑤ 양근 한 개, 음근 한 개를 갖는다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
서로 다른 두 실근을 α, β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

- (i) $c > 0$ 이면 $\alpha\beta > 0$ 이므로 두 근은 모두 음
- (ii) $c < 0$ 이면 $\alpha\beta < 0$ 이므로 두 근은 양, 음
- (iii) $c = 0$ 이면 $\alpha\beta = 0$ 이므로 두 근은 음, 0