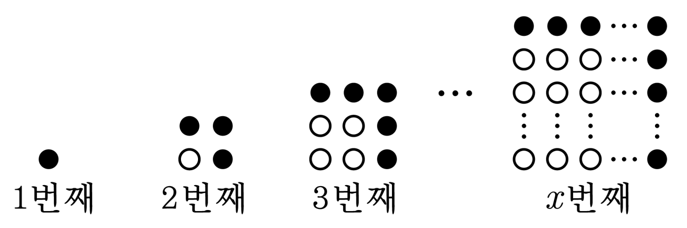
1. 다음 그림과 같이 점을 찍어 나갈 때, x번째 그림에 새로 찍어야 할 점의 갯수를 y개라고 하면 y는 x의 함수이다. 함수의 관계식은?



① $y = x$　　② $y = 2x$　　③ $y = x - 1$

④ $y = 2x - 1$　　⑤ $y = 3x$

해설

1번째 : 1
2번째 : $1 \times 2 + 1$
3번째 : $2 \times 2 + 1$
4번째 : $3 \times 2 + 1$
$\vdots$
x번째 : $(x - 1) \times 2 + 1$
$\therefore y = 2x - 1$

2. x의 값이 10보다 작은 소수인 함수 $f(x) = (x$의 약수의 갯수$)$의 함숫값은?

① $2, 3, 5, 7$　② 2　③ $1, 2, 3, 5, 7$
④ $2, 3, 5$　⑤ $4, 5$

해설

x의 값은 $2, 3, 5, 7$
소수는 1과 자신만을 약수로 가지는 수이다.
그러므로 약수의 갯수는 2이다.
x의 값과 관계없이 $f(x)$는 항상 2이므로
함숫값은 2이다.

3. x가 $0 < x < 10$ 인 정수이고 $y = (x$를 3 으로 나눈 나머지) 일 때, $y = 2$ 에 대응하는 x를 모두 구하면?

① 2 ② 0, 1, 2 ③ 2, 5, 8 ④ 3, 6, 9 ⑤ 2, 5

해설

$0 < x < 10$ 인 정수 중에서 3 으로 나누었을 때 나머지가 2 인 것을 찾으면 된다.
$\therefore x = 2, 5, 8$

4. x의 값이 1 이상 4 이하인 자연수이고, y의 값이 -3이상 8 이하인 정수일 때, 다음 중 y가 x의 함수인 것은?

① $y=$ (x와 3의 곱보다 2만큼 작은 수)

② $y=$ (x보다 5만큼 큰 수)

③ $y=$ (x의 절댓값에 2를 곱한 수)

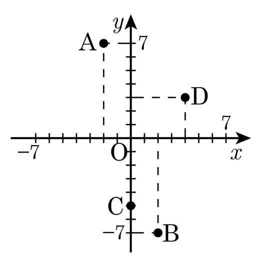
④ $y=$ (절댓값이 x보다 큰 자연수)

⑤ $y=$ (절댓값이 x보다 작은 정수)

해설

x의 값이 $1, 2, 3, 4$이고, y의 값이 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 이다.
③ $y = 2|x|$
함숫값은 $2, 4, 6, 8$이므로 모든 함숫값이 y의 범위에 포함된다.
① $y = 3x - 2$
함숫값은 $1, 4, 7, 10$이므로 함숫값이 y의 값에 포함되지 않는다.
② $y = x + 5$
함숫값은 $6, 7, 8, 9$이므로 함숫값이 y의 값에 포함되지 않는다.
④ $y=$ (절댓값이 x보다 큰 자연수)
절댓값이 1 보다 큰 자연수 $\Rightarrow \quad 2, 3, 4, 5, \cdots$
무수히 많다.
절댓값이 2 보다 큰 자연수 $\Rightarrow \quad 3, 4, 5, 6, \cdots$
무수히 많다.
x의 값 한 개에 대응하는 값이 한 개가 아니다.
$\therefore$ 함수가 아니다.
⑤ $y=$ (절댓값이 x보다 작은 정수의 개수)
절댓값이 1 보다 작은 정수 $\Rightarrow \quad 0$
절댓값이 2 보다 작은 정수 $\Rightarrow \quad -1, 0, 1$
절댓값이 3 보다 작은 정수 $\Rightarrow \quad -2, -1, 0, 1, 2$
x의 값 한 개에 대응하는 값이 한 개가 아니다.
$\therefore$ 함수가 아니다.

5. 좌표평면 위의 점 A, B, C, D 의 좌표 중 $x+y$ 의 값이 5 인 점을 골라라.



▶ 답 :

▷ 정답 : A

해설

A$(-2,7)$, B$(2,-6)$, C$(0,-5)$, D$(4,3)$ 이므로

$x+y$ 의 값은

A : $-2+7=5$

B : $2-6=-4$

C : $0-5=-5$

D : $4+3=7$

$\therefore x+y=5$ 인 점은 A 이다.

6. 점 P $(a,\ b)$ 가 제 4 사분면 위의 점일 때, 점 A $(ab,\ a-b)$ 는 제 몇 사분면 위의 점인지 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$a>0,\ b<0$ 이므로 $ab<0,\ a-b>0$
따라서 A $(ab,\ a-b)$ 는 제 2 사분면 위에 있다.

7. 점 $A(a+b,\ ab)$는 제 1사분면 위의 점이고 $B(c-d,\ cd)$는 제 4사분면 위의 점일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $b-d>0$　② $bd>0$　③ $ad<0$

④ $ac>0$　⑤ $a+b>0$

해설

$a+b,\ ab$가 제 1사분면 위의 점이므로
$a+b>0,\ ab>0$에서 a, b는 서로 같은 부호임을 알 수 있으므로
$a>0,\ b>0$이다.
$c-d,\ cd$은 제 4사분면 위의 점이므로
$c-d>0,\ cd<0$에서 $c>0$이고 $d<0$이다.
따라서, $bd<0$이 되어야 한다.

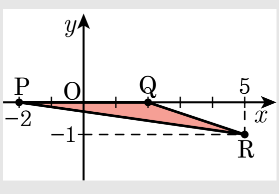
8. 다음 조건을 만족하는 세 점 P, Q, R 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$PQR 의 넓이를 구하여라.

ㄱ. 점 $\mathrm{P}(2a-6,\ 2b)$ 는 x 축 위에 있다.
ㄴ. $\mathrm{Q}(a,\ 2a-4+b)$ 는 점 P 와 y 축에 대하여 대칭인 점이다.
ㄷ. 점 R 의 좌표는 $(a+3,\ b-1)$ 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설



ㄱ. 점 $\mathrm{P}(2a-6,\ 2b)$ 는 x 축 위에 있으므로 $2b=0,\ \ b=0$
ㄴ. ㄱ에 의하여 $b=0$ 이므로 점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}(a,\ 2a-4)$ 이고, 점 $\mathrm{P}(2a-6,\ 0)$ 와 y 축에 대하여 대칭인 점이므로 $-a=2a-6, 3a=6, a=2$ 이다. 따라서 두 점의 좌표는 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(2,\ 0)$ 이다.
ㄷ. $a=2,\ b=0$ 이므로 점 R 의 좌표는 $a+3=2+3,\ b-1=0-1\quad \therefore (5,\ -1)$
따라서 $\mathrm{P}(-2,\ 0)$, $\mathrm{Q}(2,\ 0)$, $\mathrm{R}(5,\ -1)$
$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\times4\times1=2$

9. 다음 함수의 그래프 중에서 x가 증가할 때, y가 감소하는 것은 모두 몇 개인가?(단, $x > 0$이다.)

㉠ $y = 2x$	㉡ $y = -\frac{2}{3}x$	㉢ $y = -4x$
㉣ $y = \frac{3}{x}$	㉤ $y = \frac{1}{2x}$	㉥ $y = -\frac{5}{x}$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

▶ x가 증가할 때, y가 감소하는 것

(1) $y = ax(a \neq 0)$(정비례) 식 : $a < 0$

(2) $y = \frac{a}{x}(a \neq 0,\ x \neq 0)$(반비례) 식 : $a > 0$

$\therefore y = -4x,\ y = -\frac{2}{3}x,\ y = \frac{3}{x},\ y = \frac{1}{2x}$

10. x의 값이 $-9 \le x \le -4$인 함수 $y = \dfrac{a}{x}(a < 0)$의 함숫값의 범위가 $4 \le y \le b$일 때, $a - b$의 값을 구하여라.

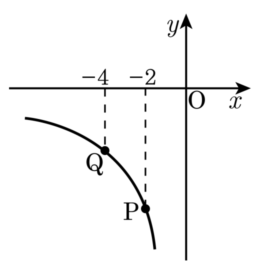
▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

함수 $y = \dfrac{a}{x}$의 그래프는 $a < 0$이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서, $x = -9$일 때, $y = 4$이고, $x = -4$일 때, $y = b$이다.
$y = \dfrac{a}{x}$에 $x = -9$, $y = 4$를 대입하면
$4 = -\dfrac{a}{9}$, $a = -36$
$y = -\dfrac{36}{x}$에 $x = -4$, $y = b$를 대입하면
$b = -\dfrac{36}{-4} = 9$
$\therefore\ a - b = -36 - 9 = -45$

11. 다음 그림은 함수 $y = \frac{a}{x}$ $(x < 0)$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 이 그래프 위의 두 점 P, Q 의 x 좌표가 각각 -2, -4 이고, 두 점의 y 좌표의 차가 -3 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

두 점 P, Q 의 y 좌표를 각각 $f(-2)$, $f(-4)$ 라고 하면

$f(-2) = \frac{a}{-2}$

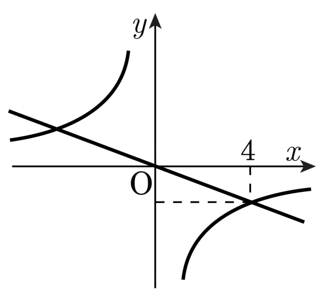
$f(-4) = \frac{a}{-4}$

두 점의 y 좌표의 차가 -3 이므로

$$f(-2) - f(-4) = \frac{a}{-2} - \frac{a}{-4} = \frac{-a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{-2a + a}{4} = -\frac{a}{4} = -3$$

따라서 $a = 12$ 이다.

12. 아래 그림은 함수 $y=-\frac{6}{x}$와 $y=ax$의 그래프를 같은 좌표평면에 그린 것이다. 두 그래프가 $x=4$인 점에서 만난다고 할 때, a의 값은?



① $-\frac{3}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 3 ④ -10 ⑤ $-\frac{5}{2}$

해설

$y=-\frac{6}{x}$에서 $x=4$를 대입하여 교점의 좌표를 구하면,

$y=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$이므로, 교점의 좌표는 $\left(4,-\frac{3}{2}\right)$이다.

$y=ax$에 교점 $\left(4,-\frac{3}{2}\right)$를 대입하여 a를 구하면,

$-\frac{3}{2}=4a$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$

13. 함수 $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ 에 대하여, $f^2(x) = f(f(x)) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $f^3(x) = f(f^2(x)) = \frac{1+f^2(x)}{1-f^2(x)}$, $\cdots$ 로 정의한다. 이 때, $f^{99}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $f^2\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$, $f^3\left(-\frac{1}{2}\right) = f(2) = \frac{1+2}{1-2} = -3$

$f^4\left(-\frac{1}{2}\right) = f(-3) = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$, $\cdots$

$f^n\left(-\frac{1}{2}\right)$ 는 $\frac{1}{3}, 2, -3 - \frac{1}{2}$ 의 값을 순환한다.

$99 \div 4 = 24 \cdots 3$ 이므로

$\therefore f^{99}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^3\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$

14. 두 함수 $f(x)=-2x+1,\ g(x)=x-3$에 대하여 $f(2)=a$일 때, $g(a)$의 값은?

① -2 ② -4 ③ -6 ④ -8 ⑤ -10

해설

$f(x)=-2x+1,\ g(x)=x-3$에서
$f(2)=-2\times 2+1=-3$
$g(a)=g(-3)=-3-3=-6$

15. 함수 $f(x)=ax$에 대해 $f(2)=1$이고, 함수 $g(x)=\frac{b}{x}$에 대해 $g(-1)=3$일 때, ab의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{2}$　③ $-\frac{3}{2}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ -3

해설

$2a=1,\ a=\frac{1}{2}$

$\frac{b}{-1}=3,\ b=-3$

$\therefore \frac{1}{2}\times(-3)=-\frac{3}{2}$

16. x가 $1, 2, 3$이고 y가 a, b, c, d일 때, 함수 $y = f(x)$에 대하여 $f(1) = a$인 경우는 모두 몇 가지인가?

① 4　　② 8　　③ 12　　④ 16　　⑤ 20

해설

$f(1) = a$로 고정되면 $f(2)$나 $f(3)$은 a, b, c, d 중 어느 것이어도 된다.
따라서 $f(2)$는 4가지, $f(3)$도 4가지이다.
따라서 $4 \times 4 = 16$이다.

17. 점 P에 대하여 점 P$'(x', y')$를 $x' = 2x+3, y' = -3y+5$와 같이 대응시킬 때, 점 P$'(9, 11)$이 되는 점 P$'$의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

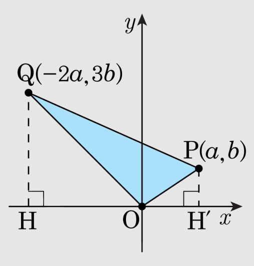
$x' = 2x+3, y' = -3y+5$에서
$9 = 2a+3, 11 = -3b+5$이고,
$a = 3, b = -2$이므로 $a+b = 1$이다.

18. 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(-2a,\ 3b)$에 대하여 $\triangle\mathrm{OPQ}$의 넓이가 15일 때, ab의 값은?(단, $a > 0, b > 0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

주어진 조건대로 좌표평면에 그리면 다음과 같다.



$\triangle\mathrm{OPQ} =$ 사다리꼴$\mathrm{PQHH'} - \triangle\mathrm{OQH} - \triangle\mathrm{OPH'}$

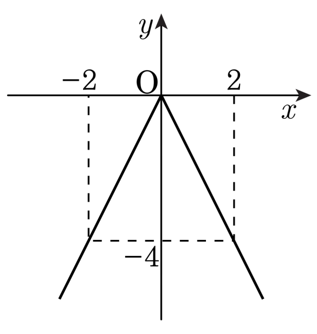
$= \frac{1}{2}(b+3b)\times 3a - \frac{1}{2}\times 2a\times 3b - \frac{1}{2}\times a\times b$

$= 6ab - 3ab - \frac{1}{2}ab$

$= \frac{5}{2}ab$

$\frac{5}{2}ab = 15$이므로 $ab = 6$이다.

19. 다음 중 아래 그래프의 식은?



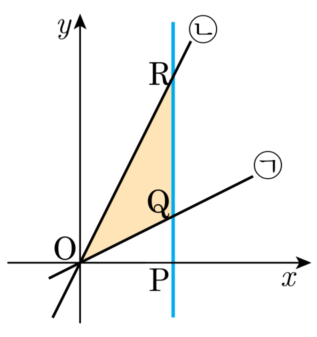
① $y=-2x$　② $y=2x$　③ $y=|2x|$

④ $y=-|2x|$　⑤ $y=-4|x|$

해설

④ $y=-|2x|$에 $x=-2$를 대입하면 $y=-4$이다.
또, $x=2$를 대입하면 $y=-4$를 만족한다.

20. 다음 그림은 두 직선 $y=\frac{1}{2}x\cdots㉠$, $y=2x\cdots㉡$이다. x축 위의 점 P를 지나서 y축에 평행한 직선이 ㉠, ㉡와 만나는 점을 각각 Q, R이라고 한다. P$(4,0)$일 때, $\triangle$OQR의 넓이는?



① 4　　② 6　　③ 8　　④ 10　　⑤ 12

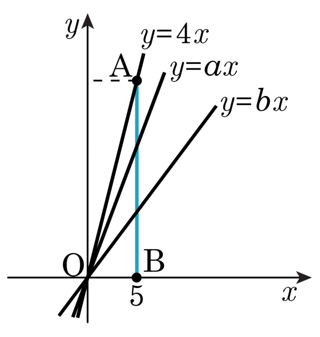
해설

$x=4$이므로 $y=2x$에서 R$(4,8)$

$y=\frac{1}{2}x$에서 Q$(4,2)$

$\triangle \mathrm{OQR}=\frac{1}{2}\times(8-2)\times 4=12$

21. 다음 그림과 같이 직선 $y=4x$ 위의 한 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 B$(5, 0)$이라고 한다. $y=ax, y=bx$의 그래프가 삼각형 AOB의 넓이를 3등분 할 때, $a-b$의 값은?



① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ 1　　④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

선분 AB를 3등분하는 점들의 좌표는 $\left(5, \frac{20}{3}\right), \left(5, \frac{40}{3}\right)$ 이므로

$\frac{20}{3}=5b,\ b=\frac{4}{3}$

$\frac{40}{3}=5a,\ a=\frac{8}{3}$

$\therefore a-b=\frac{4}{3}$

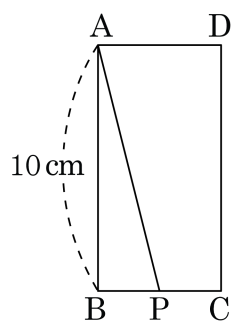
22. 함수 $\frac{12}{x}$ 의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 갯수는? (단, 경계는 포함하지 않는다.)

① 20　② 22　③ 24　④ 27　⑤ 29

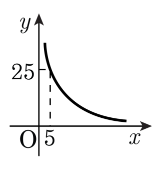
해설

$xy = 12$ 이고, x축과 y축 사이에 있으므로,
$0 < xy < 12$ 이고, x, y좌표가 자연수인 점을 차례로 찾으면
$x = 1$ 일 때, $y = 1, 2, 3, \cdots, 11$ 이므로 11 개
$x = 2$ 일 때, $y = 1, 2, 3, 4, 5$ 이므로 5 개
$x = 3$ 일 때, $y = 1, 2, 3$ 이므로 3 개
$x = 4, 5$ 일 때, $y = 1, 2$ 이므로 $2 \times 2 = 4$ 개
$x = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ 일 때, $y = 1$ 이므로 $6 \times 1 = 6$ 개
$\therefore 11 + 5 + 3 + 4 + 6 = 29$(개)

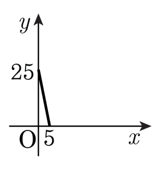
23. 다음 그림의 사각형 ABCD는 세로의 길이가 10 cm, 가로의 길이가 5 cm인 직사각형이다. 점 P가 B에서 출발하여 변 BC위에 C를 향하여 움직이며, P가 x cm 나아갔을 때의 삼각형 ABP의 넓이를 y cm^{2}라 하자. x, y사이의 관계식에 대한 그래프는?



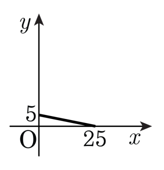
①



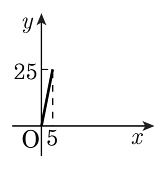
②



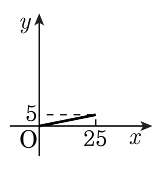
③



④



⑤

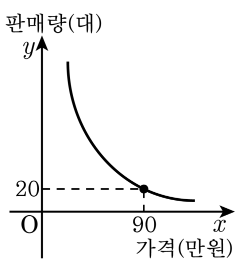


해설

$\triangle$ABP의 넓이 : $y = \frac{1}{2} \times x \times 10 = 5x$

x는 점 B를 출발해서 C까지 움직이므로 $\{0 \le x \le 5\}$이다.
따라서 넓이는 $\{0 \le y \le 25\}$이다.

24. 다음 그림은 어느 회사의 한 달 평균 A 상품 판매량과 가격 사이의 관계를 나타낸 그래프이다. 현재 이 상품의 가격이 90만 원일 때, 판매량을 20% 증가시키려면 가격을 얼마로 해야 하는지 구하여라.



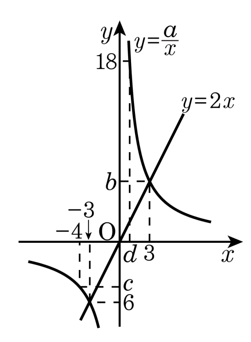
▶ 답 : 만원

▷ 정답 : 75만원

해설

판매량은 가격에 반비례한다.
가격을 x 만 원, 판매량을 y 대라 하면
$y = \frac{a}{x}$ 에 $x = 90,\ y = 20$ 을 대입하면 $20 = \frac{a}{90},\ a = 1800$
즉, 함수의 식은 $y = \frac{1800}{x}(x > 0)$
판매량을 20% 증가시키려면 $20 \times 1.2 = 24$ (대)
$y = \frac{1800}{x}$ 에 $y = 24$ 를 대입하면
$24 = \frac{1800}{x} \quad \therefore\ x = 75$

25. 다음 그림과 같이 두 함수 $y = 2x$ 와 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프가 점 $(3,\ b)$ 에서 만날 때, $a - 2b + 3c + 4d$ 의 값은?



① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{3}{2}$　　③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{7}{2}$　　⑤ $-\frac{9}{2}$

해설

$y = 2x$에 $x = 3,\ y = b$ 를 대입하면 $b = 6$

점 $(3,\ 6)$은 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로 $6 = \frac{a}{3},\ a = 18$

$\therefore\ y = \frac{18}{x}$

점 $(-4,\ c)$가 함수 $y = \frac{18}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로 $c = \frac{18}{-4} = -\frac{9}{2}$

점 $(d,\ 18)$이 함수 $y = \frac{18}{x}$ 의 그래프 위의 점이므로 $d = 1$

$\therefore a - 2b + 3c + 4d = 18 - 12 + 3 \times \left(-\frac{9}{2}\right) + 4 = -\frac{7}{2}$