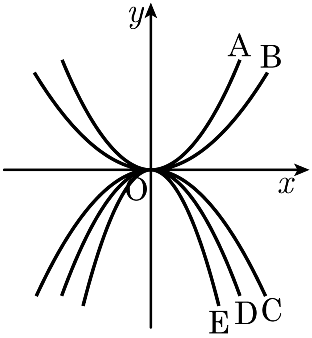
1. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프이다. 이 중 a 의 절댓값이 가장 큰 것은?

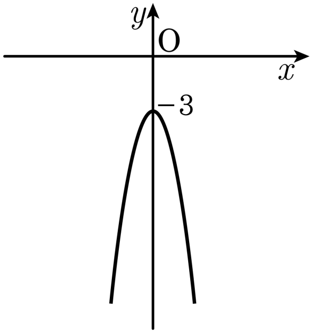


① A ② B ③ C ④ D ⑤ E

해설

y 축에 가까울수록 a 의 절댓값이 크다.

2. 다음 그림은 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 y 축으로 -3 만큼 평행이동한 것이다. 이 그래프가 점 $(2,\ m)$ 을 지난다고 할 때, 상수 m 의 값은?



① -7 ② -8 ③ -9 ④ -10 ⑤ -11

해설

$y = -2x^2 - 3$ 이 점 $(2,\ m)$ 을 지나므로
$m = -2(2)^2 - 3 = -11$ 이다.

3. 이차함수 $y = 3x^2 - 6x - 3$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동 시킨 함수는?

① $y = 3(x-2)^2 + 3$

② $y = 3(x+2)^2 + 3$

③ $y = 3(x+1)^2 + 3$

④ $y = 3(x+1)^2 - 3$

⑤ $y = 3(x-1)^2 - 3$

해설

$y = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x-1)^2 - 6$

$y = 3(x-1+2)^2 - 6 + 3 = 3(x+1)^2 - 3$ 이다.

4. 이차함수 $y=-ax^2$ 의 그래프에서 $f(-2)=-12$ 일 때, $y=-ax^2$ 과 x 축 대칭인 이차함수의 식은?

① $y=-\frac{1}{2}x^2$ ② $y=3x^2$ ③ $y=\frac{1}{3}x^2$
④ $y=-2x^2$ ⑤ $y=-4x^2$

해설

$x=-2,\ y=-12$ 를 대입하면 $a=3$ 이다.
따라서 $y=-ax^2=-3x^2$ 이므로 x 축 대칭인 이차함수는 $y=3x^2$ 이다.

5. 다음은 이차함수 $y = ax^2(a \neq 0)$ 의 그래프에 대한 설명이다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① y 축을 축으로 한다.

② 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

③ $a < 0$ 일 때, 위로 볼록하다.

④ a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.

⑤ $y = -ax^2$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

해설

$y = ax^2$ 의 그래프는 다음의 기본성질을 갖는다.
꼭짓점은 $(0, 0)$, 대칭축은 y 축, 즉 $x = 0$ 이다.
$a > 0$ 이면 아래로 볼록, $a < 0$ 이면 위로 볼록하다.
$|a|$ 이 작을수록 포물선의 폭이 넓다.
$y = -ax^2$ 와 x 축에 대하여 대칭이다. 따라서 ⑤가 옳지 않다.

6. 이차함수 $y = 3x^2 - 6x + 7$을 $y = a(x-p)^2 + q$ 의 꼴로 바꾸었을 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 - 6x + 7 \\ &= 3\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + 7 \\ &= 3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 4 \\ &= 3(x-1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = 3,\ p = 1,\ q = 4$

$\therefore\ a + p + q = 3 + 1 + 4 = 8$

7. $y=2x^2+4x+k+8$ 이 x 축과 한 점에서 만날 때의 x 좌표와 k 의 값의 합을 구하면?

① -11 ② -7 ③ -3 ④ 1 ⑤ 5

해설

$y=2(x^2+2x+1-1)+k+8$

$y=2(x+1)^2+k+6$ 의 꼭짓점이 $(-1,k+6)$ 이므로 $k+6=0$

$\therefore k=-6$

x 축과 한 점에서 만날 때의 x 좌표는 꼭짓점의 x 좌표이므로 -1 이다.

따라서 x 좌표와 k 의 값의 합은 $(-1)+(-6)=-7$ 이다.

8. 다음 중 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 꼭짓점의 좌표는 $(2, -3)$ 이다.

② $y = x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

③ 축의 방정식은 $x = 2$ 이다.

④ 아래로 볼록하다.

⑤ $x < 2$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

해설

주어진 식을 정리하면 $y = -(x-2)^2 + 1$
① 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ 1)$
② $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.
④ 위로 볼록한 그래프
⑤ $x < 2$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

9. 이차함수 $y=x^2-ax+b$ 의 꼭짓점이 x 축 위에 있을 때, $\frac{a^2}{b}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

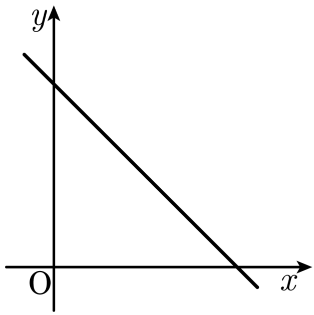
$y=x^2-ax+b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$,

꼭짓점 $\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+b\right)$ 가 x 축 위에 있으므로 $-\frac{a^2}{4}+b=0$,

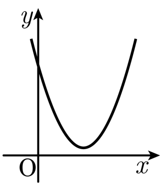
$b=\frac{a^2}{4}$,

$\frac{a^2}{b}=a^2\times\frac{1}{b}=a^2\times\frac{4}{a^2}=4$

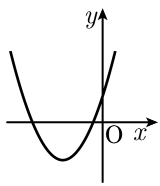
10. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것은?



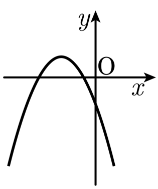
①



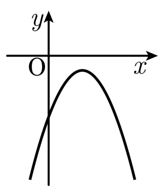
②



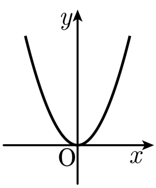
③



④



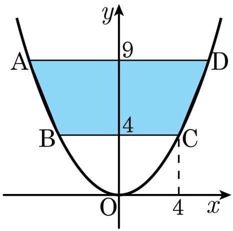
⑤



해설

그래프가 오른쪽 아래를 향하므로 $a < 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = a(x+b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $-b < 0$, $-a > 0$ 이므로 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 그래프이다.

11. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 네 꼭짓점이 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프 위에 있는 사다리꼴이다. □ABCD 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 50

해설

$y = ax^2$ 에 점 C $(4,\ 4)$ 를 대입하면

$4 = a \times 4^2$

$a = \dfrac{1}{4}$

$y = \dfrac{1}{4}x^2$ 에서 A, D 의 y 좌표가 9이므로

$9 = \dfrac{1}{4}x^2$

$x^2 = 36$

$x = \pm 6$

$\overline{\mathrm{AD}} = 12,\ \overline{\mathrm{BC}} = 8$ 이므로

$\therefore$ (□ABCD의 넓이) $= (12+8) \times 5 \times \dfrac{1}{2} = 50$

12. 포물선 $y = -2x^2 - bx + c$ 에서 $b < 0,\ c > 0$ 이면 꼭짓점은 제 몇 사분면 위에 있는가?

① 원점 ② 제1 사분면 ③ 제2 사분면

④ 제3 사분면 ⑤ 제4 사분면

해설

$y = -2x^2 - bx + c = -2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2}{8} + c = -2\left(x + \frac{b}{4}\right)^2 + \frac{b^2 + 8c}{8}$

$\therefore$ 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{4},\ \frac{b^2 + 8c}{8}\right)$

그런데 $b < 0,\ c > 0$ 이므로 $-\frac{b}{4} > 0,\ \frac{b^2 + 8c}{8} > 0$

$\therefore$ 제 1 사분면

13. 이차함수 $y = -3x^2 + 6x + 4a$ 의 최댓값은 음수이고, 그 그래프가 점 $(-a,\ 2a-7)$ 을 지날 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{7}{3}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 4a \\ &= -3(x-1)^2 + 3 + 4a \end{aligned}$$

$y = -3(x-1)^2 + 3 + 4a$ 의 그래프가 점 $(-a, 2a-7)$ 을 지나므로

$2a - 7 = -3(-a-1)^2 + 3 + 4a$ 을 정리하면 $3a^2 + 4a - 7 = 0$,

$(3a+7)(a-1) = 0$

$\therefore a = -\frac{7}{3}\ or\ 1$

그런데 최댓값 $3 + 4a$ 의 값이 음수이므로 $a = -\frac{7}{3}$ 이다.

14. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2 = 4a - 4$

$\therefore a = \dfrac{3}{2}$

$y = \dfrac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \dfrac{3}{2}x^2 - 9x + \dfrac{19}{2}$

$a = \dfrac{3}{2},\ b = -9,\ c = \dfrac{19}{2}$

$\therefore\ a - b - c = \dfrac{3}{2} - (-9) - \dfrac{19}{2} = 1$

15. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = x^2 + kx + k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k$$

최솟값 $m = -\dfrac{k^2}{4} + k$

$$m = -\frac{k^2}{4} + k = -\frac{1}{4}(k-2)^2 + 1$$

$k = 2$ 일 때, m 은 최댓값 1 을 갖는다.

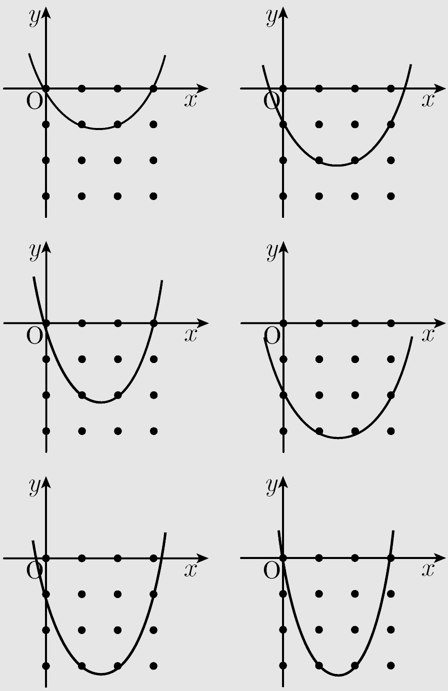
16. 좌표평면 위의 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{7}{2}, -\frac{7}{2} \le y \le \frac{1}{2}$ 의 영역에서 x, y 좌표가 모두 정수인 점 중 원점을 포함한 4개의 점을 지나는 서로 다른 이차함수의 그래프는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 12개

해설

주어진 범위에서 x 좌표가 될 수 있는 정수는 0, 1, 2, 3이고
y 좌표가 될 수 있는 정수는 -3, -2, -1, 0이다.
포물선이 아래로 볼록한 경우에 아래 그림과 같이 모두 6개를 그릴 수 있다.



포물선이 위로 볼록한 경우도 마찬가지로 6개의 포물선을 그릴 수 있다.
따라서 구하는 포물선의 개수는 12개이다.

17. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(4,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -2)$ 와 직선 $y=2x$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{211}{10}$

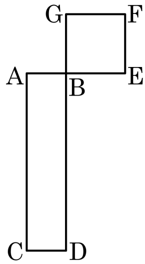
해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ 2a)$ 라 하면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$$
$$=(a-4)^2+(2a-1)^2+(a-1)^2+(2a+2)^2$$
$$=10a^2-6a+22$$
$$=10\left(a-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{211}{10}$$

따라서 $a=\dfrac{3}{10}$ 일 때, 최솟값은 $\dfrac{211}{10}$ 이다.

18. 다음 그림과 같이 선분 AB 의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2 : 3$ 이 되도록 점 E 를 잡고 선분 BE 를 한 변으로 하는 정사각형 BEFG 를 그릴 때, 선분 GD 의 길이는 12 이다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{576}{13}$

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = x$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BE}} = 2 : 3$ 이므로

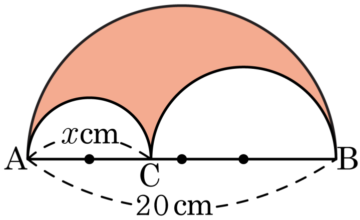
$\overline{\mathrm{BE}} = \dfrac{3}{2}x = \overline{\mathrm{BG}}$

$\overline{\mathrm{BD}} = 12 - \overline{\mathrm{BG}} = 12 - \dfrac{3}{2}x = \overline{\mathrm{AC}}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 &= x^2 + \left(12 - \frac{3}{2}x\right)^2 \\ &= \frac{13}{4}\left(x - \frac{72}{13}\right)^2 + \frac{576}{13}\end{aligned}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2$ 의 최솟값은 $\dfrac{576}{13}$ 이다.

19. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. 큰 반원의 지름이 20 cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi\,\text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하면?



① 10 ② 15 ③ 16 ④ 25 ⑤ 36

해설

$\overline{AC} = x\,\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (20 - x)\,\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 10^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{20-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$50\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{400 - 40x + x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

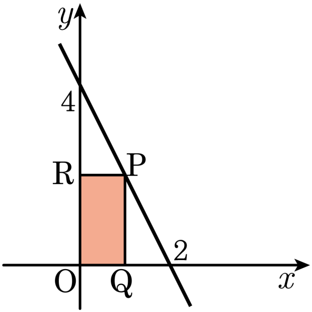
$$50\pi - \left(\frac{2x^2 - 40x + 400}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 5x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 20x + 100 - 100) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 10)^2 + 25\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 10 cm 일 때, 넓이는 최댓값 $25\pi\,\text{cm}^2$ 를 갖는다.

20. 직선 $y=-2x+4$ 위의 제1 사분면에 있는 한 점 P 에서 x 축, y 축에 수선을 그어 그때의 수선의 발을 각각 Q, R 이라 할 때, 사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= x(-2x+4)(0<x<2) \\ &= -2x^2+4x \\ &= -2(x^2-2x+1-1) \\ &= -2(x-1)^2+2 \end{aligned}$$

$x=1$ 일 때 최댓값 2