

1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x 축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8

② -1

③ 0

④ 5

⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$ 에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$ 이어야
하므로

$$k^2 + 8k \geq 0, \quad k(k + 8) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -8 \text{ 또는 } k \geq 0$$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

- ① $k > 2, k < -1$ ② $k > 3, k < -1$ ③ $k > 1, k < -1$
④ $k > 3, k < -2$ ⑤ $k > 3, k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
 $-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
 $D = (1 - k)^2 - 4 > 0$
 $k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
 $\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$ 일 때, 모든 k 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y = x^2 - 2kx + 2k + 3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - 2kx + 2k + 3 = 0$ 의 두 근이므로 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = 2k, \alpha\beta = 2k + 3$
 $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{5}$ 에서 $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로
 $20 = (2k)^2 - 4(2k + 3), 4k^2 - 8k - 12 = 20$

$k^2 - 2k - 8 = 0$
따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k 의 값의 합은 2이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 x 축 ($y = 0$)과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

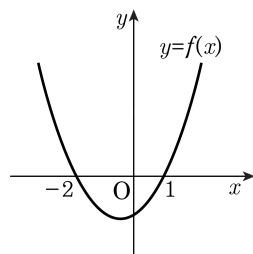
$D = a^2 - 12 > 0$ 에서

$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 4이다.

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

- ① -3 ② -2 ③ -1
 ④ 0 ⑤ 1



해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y = f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y = f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이

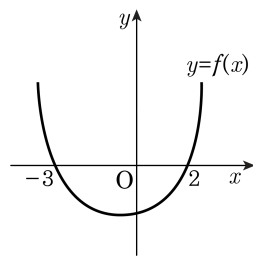
$-2-a, 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a = -3$

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개



해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로

방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2$ $\therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3$ $\therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

7. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을

D라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$$\therefore a = -2$$

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 의 그래프와 직선 $y = x + 1$ 이 한 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$y = x^2 + ax + a \cdots \textcircled{㉠}$$

$$y = x + 1 \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 y 를 소거하여 정리하면

$$x^2 + ax + a = x + 1$$

$$\therefore x^2 + (a-1)x + a-1 = 0$$

㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D 라 하면

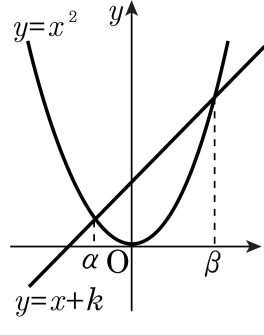
$$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$$

$$\therefore (a-1)\{(a-1)-4\} = 0$$

$$\therefore (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1 \text{ 또는 } 5$$

따라서 구하는 a 의 값은 6

9. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

- ㉠ $\alpha + \beta = 1$ ㉡ $k > 0$ ㉢ $\alpha\beta = -k$

- ① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
 ④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x 좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1 \cdots (\text{참})$$

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = 1 + 4k > 0$

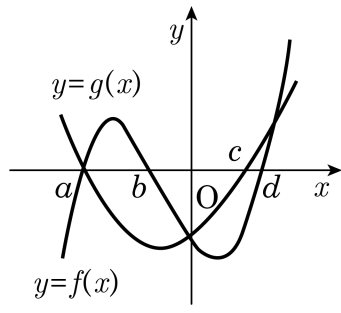
$$\text{에서 } k > -\frac{1}{4} \cdots (\text{거짓})$$

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha\beta = -k \cdots (\text{참})$$

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

10. 두 개의 방정식 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2 + \{g(x)\}^2 = 0$ 를 만족하는 것을 고르면?



- ① a ② a, b ③ a, c
 ④ a, b, d ⑤ a, b, c, d

해설

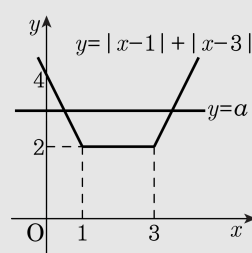
$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ 를 모두 만족하는 것은 a 이다.
 $(\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 = 0$ 이면
 $a = 0$ 이고 $b = 0$ 이다.)

11. x 의 방정식 $|x-1| + |x-3| = a$ 가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < 1$ ② $a > 1$ ③ $a < 2$ ④ $a > 2$ ⑤ $a < 3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
 $a > 2$



12. x 에 관한 방정식 $|x^2 - 1| - x - k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $1 < k < \frac{5}{4}$ ② $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$ ③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$
 ④ $k < 1, k > \frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2 - 1| - x - k = 0$ 을 변형하여
 분리하면

$$|x^2 - 1| = x + k, y = |x^2 - 1|, y = x + k$$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.

$$y = -x^2 + 1, y = x + k \text{가}$$

두 점에서 만나야하므로

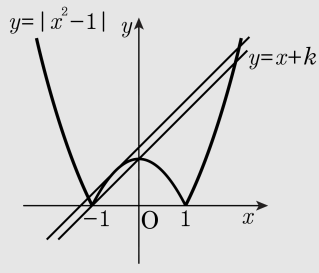
$x^2 + x + k - 1 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$D = 1 - 4k + 4 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

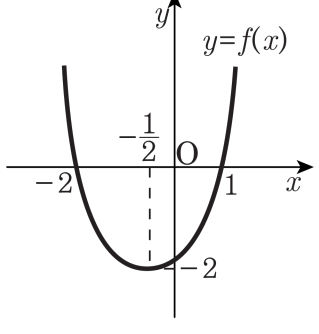
또, 직선 $y = x + k$ 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 위에 존재해야하므로

$$0 < -1 + k \quad \therefore k > 1$$

$$\therefore 1 < k < \frac{5}{4}$$



13. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?

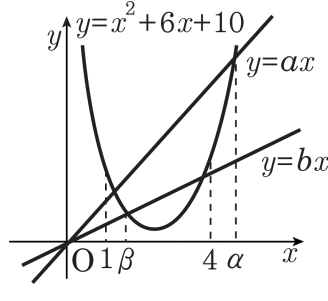


- ① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로
 $f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$
i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$
ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$
따라서 모든 근의 합은
 $-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$

14. 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β , 4 일 때, $\frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

방정식 $x^2 - 6x + 10 = ax$

즉, $x^2 - (a + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 1, α 이므로

$$1 + \alpha = a + 6$$

$$1 \cdot \alpha = 10$$

$$\therefore \alpha = 10, a = 5$$

방정식 $x^2 - 6x + 10 = bx$

즉, $x^2 - (b + 6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 β , 4 이므로

$$\beta + 4 = b + 6$$

$$4 \cdot \beta = 10$$

$$\therefore \beta = \frac{5}{2}, b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$$

15. $a < -1$ 일 때, x 에 대한 방정식 $|x^2 - 1| - 1 = a$ 의 실근의 개수를 구하면? (단, 중근은 하나로 센다.)

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

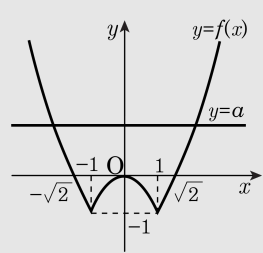
방정식 $|x^2 - 1| - 1 = a$ 의 실근의 개수는 $y = |x^2 - 1| - 1$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

$$y = |x^2 - 1| - 1 \text{에서 } |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & (x^2 - 1 \geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^2 + 1 & (x^2 - 1 < 0 \text{ 일 때}) \end{cases}$$

이므로 $f(x) = |x^2 - 1| - 1$ 로 놓으면

(i) $x^2 - 1 \geq 0$, 즉 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때,

$$f(x) = x^2 - 1 - 1 = x^2 - 2$$



(ii) $x^2 - 1 < 0$, 즉 $-1 < x < 1$ 일 때,

$$f(x) = -x^2 + 1 - 1 = -x^2$$

(i), (ii)로부터 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서, 구하는 실근의 개수는 a 의 값에 따라 다음과 같다.

$$\begin{cases} a < -1 \text{ 일 때, 없다.} \\ a = -1 \text{ 또는 } a > 0 \text{ 일 때, 2개} \\ a = 0 \text{ 일 때, 3개} \\ -1 < a < 0 \text{ 일 때, 4개} \end{cases}$$