1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8　　② -1　　③ 0　　④ 5　　⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$ 에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$ 이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$

④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로

$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ 에서

$\mathrm{D} = (1-\mathrm{k})^2 - 4 > 0$

$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) > 0$

$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$과 x축과의 두 교점 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, 모든 k의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

포물선 $y=x^2-2kx+2k+3$ 과 x 축과의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2-2kx+2k+3=0$ 의 두 근이므로 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면 이차방정식의 두 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k,\ \alpha\beta=2k+3$

$|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$에서 $|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$20=(2k)^2-4(2k+3),\ 4k^2-8k-12=20$

$k^2-2k-8=0$

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 2이다.

4. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 직선 $y = 0$ 과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a 의 최솟값을 구하여라.

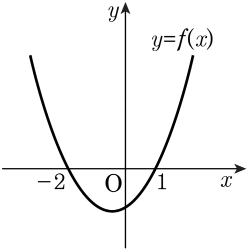
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$ 의 그래프가 x 축 $(y = 0)$ 과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$ 에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a 의 최솟값은 4 이다.

5. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① −3　　② −2　　③ −1

④ 0　　⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로

$y=f(x+a)$ 의 그래프가

x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$

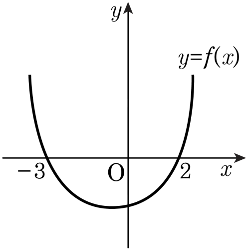
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이

$-2-a,\ 1-a$ 이고

그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$

$\therefore a=-3$

6. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개 ② 2개 ③ 3개

④ 4개 ⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로

방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은

(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$

(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3$ $\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

7. 직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

직선 $y = 2x + a$ 와 이차함수 $y = x^2 - 1$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로

이차방정식 $2x + a = x^2 - 1$, 즉 $x^2 - 2x - a - 1 = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + a + 1 = 0$$

$\therefore a = -2$

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$의 그래프와 직선 $y = x + 1$이 한 점에서 만나도록 하는 a의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

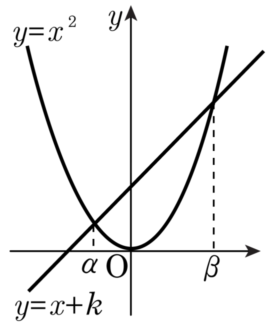
▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 + ax + a$ ⋯㉠
$y = x + 1$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서 y를 소거하여 정리하면
$x^2 + ax + a = x + 1$
$\therefore\ x^2 + (a-1)x + a - 1 = 0$
㉠, ㉡가 한 점에서 만나면 이차방정식이 중근을 가지므로, 판별식을 D라 하면
$D = (a-1)^2 - 4(a-1) = 0$
$\therefore\ (a-1)\{(a-1) - 4\} = 0$
$\therefore\ (a-1)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 1$ 또는 5
따라서 구하는 a의 값은 6

9. 이차함수 $y = x^2$과 일차함수 $y = x + k$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\alpha + \beta = 1$　　㉡ $k > 0$　　㉢ $\alpha\beta = -k$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$과 $y = x + k$의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$은 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = 1 \cdots$ (참)

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$의 판별식을 D라 하면 $\mathrm{D} = 1 + 4\mathrm{k} > 0$

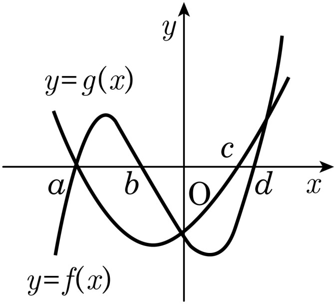
에서 $k > -\dfrac{1}{4} \cdots$ (거짓)

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta = -k \cdots$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

10. 두 개의 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$ 을 좌표평면에 나타내었더니 다음 그림과 같았다. 이 때, 다음 중 $\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=0$를 만족하는 것을 고르면?



① a　　② a, b　　③ a, c

④ a, b, d　　⑤ a, b, c, d

해설

$f(x)=0$, $g(x)=0$를 모두 만족하는 것은 a 이다.

($\because$ 실수 a, b 에 대하여 $a^2+b^2=0$ 이면

$a=0$ 이고 $b=0$ 이다.)

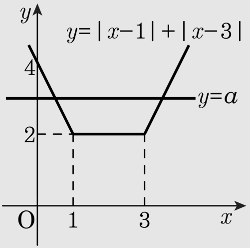
11. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



12. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$ ② $1\le k\le\frac{5}{4}$ ③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

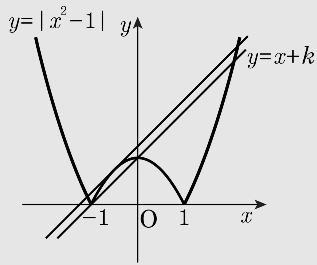
해설

$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.



$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

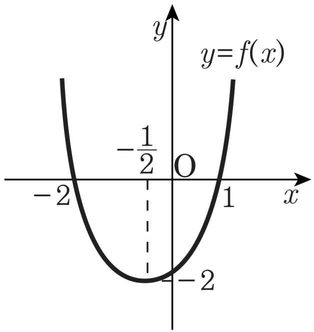
$D=1-4k+4>0$ $\therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k$ $\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

13. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ 0　⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

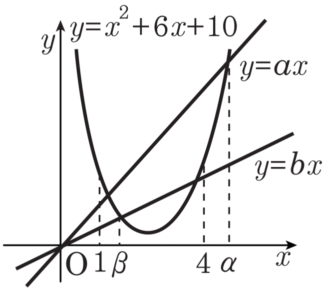
i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$$

14. 다음 그림과 같이 $y = x^2 - 6x + 10$ 의 그래프가 직선 $y = ax$ 와 만나는 두 교점이 x 좌표가 각각 1, α 이고 직선 $y = bx$ 와 만나는 두 교점의 x 좌표가 각각 β, 4 일 때, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{\alpha}{\beta}$ 의 값을 구하시오.



▶ **답 :**

▷ **정답 :** 14

해설

방정식 $x^2 - 6x + 10 = ax$

즉, $x^2 - (a+6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 1, α 이므로

$1 + \alpha = a + 6$

$1 \cdot \alpha = 10$

$\therefore\ \alpha = 10,\ a = 5$

방정식 $x^2 - 6x + 10 = bx$

즉, $x^2 - (b+6)x + 10 = 0$ 의 두 근이 β, 4 이므로

$\beta + 4 = b + 6$

$4 \cdot \beta = 10$

$\therefore\ \beta = \dfrac{5}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$

$$\therefore\ \frac{a}{b} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{\frac{1}{2}} + \frac{10}{\frac{5}{2}} = 10 + 4 = 14$$

15. $a < -1$ 일 때, x에 대한 방정식 $|x^2-1|-1=a$의 실근의 개수를 구하면? (단, 중근은 하나로 센다.)

① 없다. ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

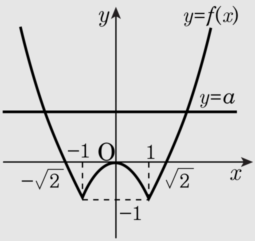
방정식 $|x^2-1|-1=a$의 실근의 개수는 $y=|x^2-1|-1$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수를 조사하면 구할 수 있다.

$y=|x^2-1|-1$에서 $|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x^2-1\geq 0 \text{ 일 때}) \\ -x^2+1 & (x^2-1<0 \text{ 일 때}) \end{cases}$

이므로 $f(x)=|x^2-1|-1$로 놓으면

(i) $x^2-1\geq 0$, 즉 $x\leq -1$ 또는 $x\geq 1$일 때,

$f(x)=x^2-1-1=x^2-2$



(ii) $x^2-1<0$, 즉 $-1<x<1$ 일 때,

$f(x)=-x^2+1-1=-x^2$

(i), (ii)로부터 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서, 구하는 실근의 개수는 a의 값에 따라 다음과 같다.

$$\begin{cases} a<-1 \text{일 때, 없다.} \\ a=-1 \text{ 또는 } a>0 \text{일 때, 2개} \\ a=0 \text{일 때, 3개} \\ -1<a<0 \text{일 때, 4개} \end{cases}$$