1. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$ 은?

① -9 ② -2 ③ 0 ④ 5 ⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

2. 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$의 값은?

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ $-\dfrac{1}{6}$ ④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α와 β이므로
$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=2$이다.
$\therefore \dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{5}{2}$

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a < -1$

해설

(두 근의 곱)$= a + 1 < 0$ $\quad \therefore a < -1$

4. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

5. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

6. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

7. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

8. x에 대한 방정식 $ix^2+(1+i)x+1=0$의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$를 곱하면

$(-i)\cdot ix^2-i(1+i)x-i=0$

$x^2+(1-i)x-i=0$

$(x-i)(x+1)=0$

$x \neq i$이므로 $x=-1$

9. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, $a,\ p,\ q$는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\left\{x-(1+i)\right\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

10. $x^2-2x+3=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$
$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$
$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$
$=9-6\cdot2+12=9$

11. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. x에 대한 이차방정식 $ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a는 실수)

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$ax^2+2(a-1)x-(a+1)=0$

$\frac{D}{4}=(a-1)^2+a(a+1)$

$=a^2-2a+1+a^2+a$

$=2a^2-a+1=2\left(a^2-\frac{1}{2}a\right)+1$

$=2\left(a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{16}\right)+1-\frac{1}{8}$

$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

13. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

14. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$의 근을 판별하면?
(단, a, b, c는 서로 다른 양의 실수이다.)

① 서로 다른 두 허근

② 서로 다른 두 실근

③ 서로 같은 두 실근

④ 서로 다른 두 허근

⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2\right\} > 0$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.
(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$일 때 중근)

15. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2+2bx+c=0$	㉡ $ax^2+\frac{1}{2}bx+c=0$
㉢ $cx^2+bx+a=0$	

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로
$D=b^2-4ac>0\cdots$
㉠ $ax^2+2bx+c=0$의 판별식은
$D=(2b)^2-4ac=4b^2-4ac$
$=3b^2+(b^2-4ac>0)$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.
㉡ [반례] $a=1,\ b=3,\ c=2$일 때
$x^2+3x+2=0$은 서로 다른 두 실근을 갖지만
$x^2+\frac{3}{2}x+2=0$은 허근을 갖는다.
㉢ $cx^2+bx+a=0$의 판별식은
$D=b^2-4ac>0$
따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16. 이차방정식 $3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

해설

$3x^2+4x-2=0$의 두 근을 α, β라 하면
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}$, $\alpha\beta=-\frac{2}{3}$
한편, $|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로
$|\alpha-\beta|^2=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\times\left(-\frac{2}{3}\right)$
$=\frac{16}{9}+\frac{8}{3}$
$=\frac{40}{9}$
따라서, $|\alpha-\beta|=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

17. $x^2-4kx+(5-k^2)=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$D/4 = 4k^2 - (5-k^2) \geq 0$

$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0$, $5k^2 \geq 5$, $\therefore k^2 \geq 1$

$\alpha + \beta = 4k$, $\alpha\beta = 5 - k^2$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10 \end{aligned}$$

$18k^2 \geq 18$, $18k^2 - 10 \geq 18 - 10$

$\alpha^2+\beta^2 \geq 8$, $\therefore$ (최솟값)$= 8$

18. 이차방정식 $x^2+6x+6=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$의 값을 다음과 같이 구하였다. 아래 풀이 과정에서 처음으로 잘못된 곳은?

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-6,\ \alpha\beta=6 \quad \cdots$ (가)

$\dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}+\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$

$=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}+\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\cdots$ (나)

$=\dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}\cdots$ (다)

$=-\sqrt{6}\cdots$ (라)

① (가)　　② (나)

③ (다)　　④ (라)

⑤ 잘못된 곳이 없다.

해설

$x^2+6x+6=0$의 두 근은 $x=-3\pm\sqrt{3}$에서

$\alpha=-3+\sqrt{3}<0,\ \beta=-3-\sqrt{3}<0$

$\therefore\ \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}+\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}=\dfrac{\beta}{-\sqrt{\alpha\beta}}+\dfrac{\alpha}{-\sqrt{\alpha\beta}}$

$=-\dfrac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$

따라서 처음으로 잘못된 부분은 (다)이다.

19. 이차방정식 $x^2-8x+15=0$의 두 근의 차는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2-8x+15=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=15$
따라서 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=64-15\times4=64-60=4$
따라서 두 근의 차는 2

20. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$의 두 근이 α, β이므로
$\alpha + \beta = 7$, $\alpha\beta = 1$
$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$
따라서 $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$

21. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2+4x+1=(x-2-\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1+2i)(x+1+2i)$

③ $x^2+4=(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

④ $2x^2+4x-5=\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2+4x+1=(x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3})$

② $x^2-2x+5=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$

③ $x^2+4=(x+2i)(x-2i)$

④ $2x^2+4x-5$

$=2\left(x-\dfrac{-2+\sqrt{14}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-2-\sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2-6x+1$

$=3\left(x-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$

22. 이차식 $x^2-6x+10$ 를 복소수 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x-6+2i)(x-6-2i)$
② $(x-6+i)(x-6-i)$
③ $(x-3+2i)(x-3-2i)$
④ $(x-3+i)(x-3-i)$
⑤ $(x-3+2i)(x-3-i)$

해설

$x^2-6x+10=0$ 의 근은 $3\pm i$

$\therefore\ x^2-6x+10=(x-3+i)(x-3-i)$

23. 복소수의 범위에서 인수분해가 옳게 된 것은?

① $x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-2i)(x+1+2i)$

⑤ $x^4 - 4 = (x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

해설

① $(x^2+2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x^2+2)$
$= (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i) \rightarrow$ (○)

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

⑤ $x^4 - 4$
$= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\ (x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

24. x 에 대한 다항식 $(x^2+2x)^2+3(x^2+2x)-4$를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2+2x+4)(x^2+2x-1)$

② $(x^2+2x+4)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

③ $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

④ $(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{3}i)(x-1+\sqrt{3}i)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

해설

$x^2+2x=Y$ 라 하면,

(준식)

$=Y^2+3Y-4=(Y-1)(Y+4)$

$=(x^2+2x-1)(x^2+2x+4)$

$=(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

25. x에 대한 다항식 $(x^2-2x)^2+3(x^2-2x)-4$를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① x^2-2
② x^2+2
③ $x^2-4x+2\sqrt{2}-4$
④ $x^2+4x+2\sqrt{2}$
⑤ $4x-4$

해설

$x^2-2x=t$ 로 치환할 때,
t^2+3t-4
$=(t+4)(t-1)$
$=(x^2-2x+4)(x^2-2x-1)$
$=(x^2-2x+4)(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$
$(\because\ x^2-2x+4$ 의 $\frac{D}{4})$
인수의 합은
$(x^2-2x+4)+(x-1-\sqrt{2})+(x-1+\sqrt{2})=x^2+2$

26. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 k의 범위를 정하면?

① $-2 \le k \le 3$　　② $2 \le k \le 5$　　③ $1 \le k \le 2$

④ $k \ge 3$　　⑤ $k \le -1$

해설

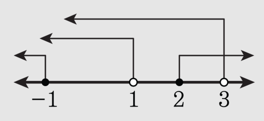
$x^2+2(k-1)x+3-k=0$

(i) $\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(3-k) \ge 0$

$(k-2)(k+1) \ge 0 \quad \therefore k \ge 2$ 또는 $k \le -1$

(ii) 두 근의 합, 곱 모두 양수

$-2(k-1)>0,\ 3-k>0 \quad \therefore k<1$



$\therefore \quad k \le -1$

27. 이차방정식 $x^2 + 2(k-11)x - k + 3 = 0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개　　② 6개　　③ 7개　　④ 8개　　⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha\beta = -k + 3 < 0$, $\alpha + \beta = -2(k-11) > 0$

$\therefore \quad 3 < k < 11$

28. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은

$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$

준식을 x에 관해서 정리하면,

$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$

따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$

즉 $m^2-3m-10=0$

$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$

$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$

29. x에 대한 이차방정식 $x^2 + (m+3)x + (m+6) = 0$의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면 ?

① -6　② -5　③ -4　④ -3　⑤ -2

해설

(ⅰ) (두근의 합) $-m-3>0$
$m<-3$
(ⅱ) (두근의 곱) $m+6>0$
$m>-6$
(ⅲ) $D=(m+3)^2-4(m+6)\geq 0$
$m^2+2m-15\geq 0$
$(m-3)(m+5)\geq 0$
$m\leq -5$ 또는 $m\geq 3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $-6<m\leq -5$
$\therefore m=-5$

30. x의 이차방정식 $x^2+(a^2-a-12)x-a+3=0$ (a는 실수)의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha+\beta=-(a^2-a-12)=0$, $\alpha\beta=-a+3<0$

$\therefore\ a=4$

31. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 두 근은 같다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$
㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>
㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 두 근은 같다.<참>
㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>
㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.<참>

32. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0\quad\therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

33. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1$, $2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

34. 방정식 $x^3-3x+1=0$의 한 근을 α, $x^2-\alpha x+1=0$의 한 근을 β라 할 때, $\beta^3+\frac{1}{\beta}^{3}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$\alpha^3-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^3-3\alpha=-1$
$\beta^2-\alpha\beta+1=0$에서 양변을 β로 나누면

$\beta+\frac{1}{\beta}=\alpha(\because \beta\neq 0)$

$$\begin{aligned}\therefore \beta^3+\frac{1}{\beta}^{3} &= \left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3-3\beta\cdot\frac{1}{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\\ &= \alpha^3-3\alpha=-1\end{aligned}$$

35. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m + 5 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m의 값의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$x^2 = X$로 놓으면
$X^2 + (m+2)X + m + 5 = 0$ ⋯⋯ ①이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,
준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로
①의 두 근을 α, β라 할 때,
$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$, $\alpha+\beta = -(m+2) > 0$, $\alpha\beta = m+5 > 0$
이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는
$-5 < m < -4$