

1. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은?

① -9

② -2

③ 0

④ 5

⑤ 13

해설

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 4 = 5$$

2. 이차방정식 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $-\frac{1}{6}$

④ $\frac{2}{5}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

두 근이 각각 α 와 β 이므로
 $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 2$ 이다.

$$\therefore \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{5}{2}$$

3. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -1$

해설

$$(\text{두 근의 곱}) = a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$$

4. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면

$$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\therefore x^2 + 2x + 4$$

$$= \{x - (-1 + \sqrt{3}i)\} \{x - (-1 - \sqrt{3}i)\}$$

$$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

5. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x - 3)(2x + 1)$

② $2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

③ $(x + 3)(2x - 1)$

④ $2 \left(x + 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

⑤ $2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}i}{2} \right) \left(x + 1 + \frac{\sqrt{2}i}{2} \right)$

해설

$$a = 2, b' = -2, c = 3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2 \left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \left(x - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

6. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2 - (3-\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ 의 두 근은?

- ① $\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ ② $-\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$ ③ $\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2} + 1$ 을 곱하면

$$x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 0$$

$$(x - \sqrt{2}) \{x - (\sqrt{2} + 1)\} = 0$$

$$\therefore x = \sqrt{2}, \sqrt{2} + 1$$

해설

$x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 0$ 로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

7. 이차방정식 $(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(\sqrt{3} - 1)x - 6 = 0$ 의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2 + \sqrt{3}$ 을 곱하면

$$x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x - (12 + 6\sqrt{3}) = 0$$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x = (\sqrt{3} + 1) \pm \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2 + 12 + 6\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

$$= (\sqrt{3} + 1) \pm 2(\sqrt{3} + 1)$$

$$\therefore x = 3\sqrt{3} + 3 \text{ 또는 } x = -\sqrt{3} - 1$$

큰 근은 $3\sqrt{3} + 3$

그런데 $\sqrt{3} \approx 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

8. x 에 대한 방정식 $ix^2 + (1+i)x + 1 = 0$ 의 해를 구하여라. (단, $x \neq i$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

양변에 $-i$ 를 곱하면

$$(-i) \cdot ix^2 - i(1+i)x - i = 0$$

$$x^2 + (1-i)x - i = 0$$

$$(x-i)(x+1) = 0$$

$$x \neq i \text{이므로 } x = -1$$

9. 이차방정식 $(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 해는 $x = a$ 또는 $x = p + qi$ 이다. 이 때, $a + p + q$ 의 값을 구하여라. (단, a, p, q 는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2 + (-3+i)x + 2 = 0$ 의 양변에 $1+i$ 를 곱하면

$$(1+i)(1-i)x^2 + (1+i)(-3+i)x + 2(1+i) = 0$$

$$2x^2 - 2(2+i)x + 2(1+i) = 0$$

$$x^2 - (2+i)x + 1+i = 0$$

$$(x-1)\{x-(1+i)\} = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 1+i$$

$$\therefore a + p + q = 3$$

10. $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2 - 2x + 3 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$$

$$(\alpha^2 - 2\alpha)(\beta^2 - 2\beta)$$

$$= \alpha^2\beta^2 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta$$

$$= (\alpha\beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + 4\alpha\beta$$

$$= 9 - 6 \cdot 2 + 12 = 9$$

11. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a - 1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

12. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + 2(a-1)x - (a+1) = 0$ 은 어떤 근을 갖는지 판별하시오. (단, a 는 실수)

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$$ax^2 + 2(a-1)x - (a+1) = 0$$

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 + a(a+1)$$

$$= a^2 - 2a + 1 + a^2 + a$$

$$= 2a^2 - a + 1 = 2\left(a^2 - \frac{1}{2}a\right) + 1$$

$$= 2\left(a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{16}\right) + 1 - \frac{1}{8}$$

$$= 2\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

13. 0이 아닌 두 실수 a, b 가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 를 만족할 때, 다음 [보기]의 x 에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로 $a < 0, b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$ 에서

$$D = b^2 - 4a > 0$$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$ 에서

$D = a^2 + 4b$ 는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$ 에서

$$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$$

14. $x^2 + 2\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}x + \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = 0$ 의 근을 판별하면?
(단, a, b, c 는 서로 다른 양의 실수이다.)

- ① 서로 다른 두 허근
- ② 서로 다른 두 실근
- ③ 서로 같은 두 실근
- ④ 서로 다른 두 허근
- ⑤ 한 근은 실근, 한 근은 허근

해설

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{bc}} - \frac{1}{\sqrt{ca}} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \right\} > 0 \end{aligned}$$

따라서 서로 두 실근을 갖는다.

(단, $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{c}}$ 일 때 중근)

15. x 에 대한 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 다음 [보기]의 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

㉠ $ax^2 + 2bx + c = 0$

㉡ $ax^2 + \frac{1}{2}bx + c = 0$

㉢ $cx^2 + bx + a = 0$

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + bx + c = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로

$$D = b^2 - 4ac > 0 \dots$$

㉠ $ax^2 + 2bx + c = 0$ 의 판별식은

$$D = (2b)^2 - 4ac = 4b^2 - 4ac$$

$$= 3b^2 + (b^2 - 4ac > 0)$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉡ [반례] $a = 1, b = 3, c = 2$ 일 때

$x^2 + 3x + 2 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖지만

$x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ 은 허근을 갖는다.

㉢ $cx^2 + bx + a = 0$ 의 판별식은

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

16. 이차방정식 $3x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha - \beta|$ 의 값을 구하면?

① $\frac{\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

③ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

해설

$3x^2 + 4x - 2 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -\frac{4}{3}, \alpha\beta = -\frac{2}{3}$$

$$\text{한편, } |\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 \\ = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \text{ 이므로}$$

$$|\alpha - \beta|^2 = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{9} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{40}{9}$$

$$\text{따라서, } |\alpha - \beta| = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

17. $x^2 - 4kx + (5 - k^2) = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$D/4 = 4k^2 - (5 - k^2) \geq 0$$

$$4k^2 - 5 + k^2 \geq 0, 5k^2 \geq 5, \therefore k^2 \geq 1$$

$$\alpha + \beta = 4k, \quad \alpha\beta = 5 - k^2$$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= 16k^2 - 10 + 2k^2 \\ &= 18k^2 - 10\end{aligned}$$

$$18k^2 \geq 18, 18k^2 - 10 \geq 18 - 10$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 8, \therefore (\text{최솟값}) = 8$$

18. 이차방정식 $x^2 + 6x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ 의 값을 다음과 같이 구하였다. 아래 풀이 과정에서 처음으로 잘못된 곳은?

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -6, \alpha\beta = 6 \quad \dots \text{(가)}$$

$$\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} \quad \dots \text{(나)}$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} \quad \dots \text{(다)}$$

$$= -\sqrt{6} \quad \dots \text{(라)}$$

① (가)

② (나)

③ (다)

④ (라)

⑤ 잘못된 곳이 없다.

해설

$x^2 + 6x + 6 = 0$ 의 두 근은 $x = -3 \pm \sqrt{3}$ 에서

$$\alpha = -3 + \sqrt{3} < 0, \beta = -3 - \sqrt{3} < 0$$

$$\therefore \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\therefore \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}} = \frac{\beta}{-\sqrt{\alpha\beta}} + \frac{\alpha}{-\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= -\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

따라서 처음으로 잘못된 부분은 (다)이다.

19. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근의 차는?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$x^2 - 8x + 15 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha + \beta = 8, \alpha\beta = 15$$

$$\text{따라서 } (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= 64 - 15 \times 4 = 64 - 60 = 4$$

따라서 두 근의 차는 2

20. 이차방정식 $x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 12

해설

$x^2 - 7x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = 7, \alpha\beta = 1$$

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = 7 + 2 = 9$$

$$\text{따라서 } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 3$$

21. 다음 중 인수분해를 바르게 한 것을 고르면?

① $x^2 + 4x + 1 = (x - 2 - \sqrt{3})(x + 2 - \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 + 2i)(x + 1 + 2i)$

③ $x^2 + 4 = (x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④ $2x^2 + 4x - 5 = \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right) \left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$

⑤ $3x^2 - 6x + 1 = 3 \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$

해설

근의 공식을 통해 나온 해를 바탕으로 인수분해 한다

① $x^2 + 4x + 1 = (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3})$

② $x^2 - 2x + 5 = (x - 1 - \sqrt{6})(x - 1 + \sqrt{6})$

③ $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$

④ $2x^2 + 4x - 5$

$$= 2 \left(x - \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}\right) \left(x - \frac{-2 - \sqrt{14}}{2}\right)$$

⑤ $3x^2 - 6x + 1$

$$= 3 \left(x - \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)$$

22. 이차식 $x^2 - 6x + 10$ 를 복소수 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x - 6 + 2i)(x - 6 - 2i)$

② $(x - 6 + i)(x - 6 - i)$

③ $(x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)$

④ $(x - 3 + i)(x - 3 - i)$

⑤ $(x - 3 + 2i)(x - 3 - i)$

해설

$$x^2 - 6x + 10 = 0 \text{ 의 근은 } 3 \pm i$$

$$\therefore x^2 - 6x + 10 = (x - 3 + i)(x - 3 - i)$$

23. 복소수의 범위에서 인수분해가 옳게 된 것은?

① $x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-2i)(x+1+2i)$

⑤ $x^4 - 4 = (x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

해설

① $(x^2 + 2)(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)(x^2 + 2)$
 $= (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i) \rightarrow (\bigcirc)$

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

⑤ $x^4 - 4$

$= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

24. x 에 대한 다항식 $(x^2 + 2x)^2 + 3(x^2 + 2x) - 4$ 를 계수가 복소수인 범위에서 인수분해 한 것은?

① $(x^2 + 2x + 4)(x^2 + 2x - 1)$

② $(x^2 + 2x + 4)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

③ $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

④ $(x^2 - 2x + 4)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{3}i)(x - 1 + \sqrt{3}i)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$

해설

$x^2 + 2x = Y$ 라 하면,

(준식)

$$= Y^2 + 3Y - 4 = (Y - 1)(Y + 4)$$

$$= (x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 4)$$

$$= (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$$

25. x 에 대한 다항식 $(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) - 4$ 를 계수가 실수인 범위에서 인수분해 하였을 때, 모든 인수들의 합은?

① $x^2 - 2$

② $x^2 + 2$

③ $x^2 - 4x + 2\sqrt{2} - 4$

④ $x^2 + 4x + 2\sqrt{2}$

⑤ $4x - 4$

해설

$x^2 - 2x = t$ 로 치환할 때,

$$t^2 + 3t - 4$$

$$= (t + 4)(t - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

$$(\because x^2 - 2x + 4 \text{ 의 } \frac{D}{4})$$

인수의 합은

$$(x^2 - 2x + 4) + (x - 1 - \sqrt{2}) + (x - 1 + \sqrt{2}) = x^2 + 2$$

26. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 3-k = 0$ 의 두 근이 모두 양수가 되도록 k 의 범위를 정하면?

① $-2 \leq k \leq 3$

② $2 \leq k \leq 5$

③ $1 \leq k \leq 2$

④ $k \geq 3$

⑤ $k \leq -1$

해설

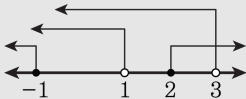
$$x^2 + 2(k-1)x + 3-k = 0$$

$$(i) \frac{D}{4} = (k-1)^2 - (3-k) \geq 0$$

$$(k-2)(k+1) \geq 0 \quad \therefore k \geq 2 \text{ 또는 } k \leq -1$$

(ii) 두 근의 합, 곱 모두 양수

$$-2(k-1) > 0, 3-k > 0 \quad \therefore k < 1$$



$$\therefore k \leq -1$$

27. 이차방정식 $x^2 + 2(k - 11)x - k + 3 = 0$ 이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k 의 개수는?

① 5개

② 6개

③ 7개

④ 8개

⑤ 9개

해설

두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha\beta = -k + 3 < 0, \alpha + \beta = -2(k - 11) > 0$$

$$\therefore 3 < k < 11$$

28. 다음 x 의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m 의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m) - x(7-m^2) = 18 - m^2$$

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은

$$\alpha + \beta = 0, \alpha\beta < 0$$

준식을 x 에 관해서 정리하면,

$$3x^2 + (m^2 - 3m - 10)x + m^2 + 3m - 18 = 0$$

$$\text{따라서, } \alpha + \beta = \frac{-(m^2 - 3m - 10)}{3} = 0,$$

$$\text{즉 } m^2 - 3m - 10 = 0$$

$$(m-5)(m+2) = 0 \quad \therefore m = 5, -2 \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$$\alpha\beta = \frac{m^2 + 3m - 18}{3} < 0, m^2 + 3m - 18 < 0$$

$$(m-3)(m+6) < 0 \quad \therefore -6 < m < 3 \dots\dots \textcircled{\text{B}}$$

$\textcircled{\text{A}}, \textcircled{\text{B}}$ 의 공통범위에 의해 $m = -2$

29. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + (m+3)x + (m+6) = 0$ 의 두 근이 모두 양수일 때, 실수 m 의 값의 범위에 속하는 정수를 구하면?

① -6

② -5

③ -4

④ -3

⑤ -2

해설

(i) (두근의 합) $-m - 3 > 0$

$m < -3$

(ii) (두근의 곱) $m + 6 > 0$

$m > -6$

(iii) $D = (m+3)^2 - 4(m+6) \geq 0$

$m^2 + 2m - 15 \geq 0$

$(m-3)(m+5) \geq 0$

$m \leq -5$ 또는 $m \geq 3$

(i), (ii), (iii)에서 $-6 < m \leq -5$

$\therefore m = -5$

30. x 의 이차방정식 $x^2 + (a^2 - a - 12)x - a + 3 = 0$ (a 는 실수)의 두 실근은 절대값이 같고 부호가 반대라 한다. 다음 중 a 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha + \beta = -(a^2 - a - 12) = 0, \alpha\beta = -a + 3 < 0$$

$$\therefore a = 4$$

31. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.
- ㉡ $k = 1$ 이면 두 근은 같다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉤ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡

② ㉡, ㉤

③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 두 근은 같다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉤ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1+k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.<참>

32. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

33. 이차방정식 $2x^2 + x - 5 = 0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x - \sqrt{41})^2 + (2x - 1)(x + 1)$ 의 값은?

① 4

② 2

③ -1

④ 5

⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

34. 방정식 $x^3 - 3x + 1 = 0$ 의 한 근을 α , $x^2 - \alpha x + 1 = 0$ 의 한 근을 β 라 할 때, $\beta^3 + \frac{1}{\beta}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \text{에서 } \alpha^3 - 3\alpha = -1$$

$\beta^2 - \alpha\beta + 1 = 0$ 에서 양변을 β 로 나누면

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \alpha (\because \beta \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore \beta^3 + \frac{1}{\beta} &= \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^3 - 3\beta \cdot \frac{1}{\beta} \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha = -1 \end{aligned}$$

35. 4차방정식 $x^4 + (m+2)x^2 + m+5 = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 갖기 위한 정수 m 의 값의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개

해설

$x^2 = X$ 로 놓으면

$X^2 + (m+2)X + m+5 = 0 \dots\dots ①$ 이 서로 다른 양의 실근을 가질 때,

준 방정식은 서로 다른 네 실근을 가지므로

①의 두 근을 α, β 라 할 때,

$$D = (m+2)^2 - 4(m+5) > 0, \alpha + \beta = -(m+2) > 0, \alpha\beta = m+5 > 0$$

이 세 식을 동시에 만족시키는 범위는

$$-5 < m < -4$$