

1. 사차방정식  $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 의 근이 아닌 것은?

- ①  $-3$       ②  $-1$       ③  $1$       ④  $2$       ⑤  $3$

해설

대입하여 성립하는 수들을 찾아내어 조립제법으로 인수분해를 하면

$$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x^3 + 2x^2 - 5x - 6) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+1) = 0$$

$$\therefore x = -3, -1, 1 \text{ 또는 } 2$$

2.  $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을  $\alpha, \beta$ 라 할 때,  $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4      ② -4      ③ 8      ④ -8      ⑤ -16

해설

$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0$ 이므로

두 허근  $\alpha, \beta$ 는

각각  $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$

3. 삼차방정식  $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$ 의 근 중에서 무리수인 두 근을  $a, b$ 라 할 때,  $a + b$ 의 값을 구하면?

①  $-6$

②  $-2$

③  $2$

④  $4$

⑤  $8$

해설

방정식을 인수분해하면  $x^3 - 7x^2 + 9x + 9 = 0$

$(x - 3)(x^2 - 4x - 3) = 0$

$x^2 - 4x - 3 = 0$ 의 두 근이  $a, b$ ( $\because$  무리수)

$a + b = 4$

4. 방정식  $(x^2 + x + 2)^2 + 8 = 12(x^2 + x)$  의 모든 근의 합은?

- ① 1                      ② 0                      ③ -1                      ④ -2                      ⑤ -3

해설

$$x^2 + x = Y \text{ 라 하면, } (Y + 2)^2 + 8 = 12Y$$

$$Y^2 - 8Y + 12 = 0, (Y - 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = 2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$(i) Y = 2$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$(ii) Y = 6$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\therefore \text{ 모든 근의 합} = -2$$



5. 사차식  $x^4 - 4x^2 - 12$  를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

①  $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

②  $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + 2i)(x - 2i)$

③  $(x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$

④  $(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 2i)(x - 2i)$

⑤  $(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{6}i)(x - \sqrt{6}i)$

해설

$$x^4 - 4x^2 - 12, \quad x^2 = Y \text{ 라 하자}$$

$$\Rightarrow Y^2 - 4Y - 12 = (Y + 2)(Y - 6) = 0$$

$$Y = -2 \text{ 또는 } Y = 6$$

$$\Rightarrow x^2 = -2, \quad x^2 = 6$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2}i, \quad x = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore x^4 - 4x^2 - 12$$

$$= (x + \sqrt{6})(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 :  $-3$

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$  에서  
 $x^2 - 2x = t$  로 놓으면  
 $t(t - 2) - 3 = 0,$   
 $t^2 - 2t - 3 = 0$   
 $(t - 3)(t + 1) = 0$   
 $\therefore t = 3$  또는  $t = -1$   
( i )  $t = 3$  , 즉  $x^2 - 2x = 3$  일 때  
 $x^2 - 2x - 3 = 0$   
 $(x - 3)(x + 1) = 0$   
 $\therefore x = -1$  또는  $x = 3$   
( ii )  $t = -1$  , 즉  $x^2 - 2x = -1$  일 때  
 $x^2 - 2x + 1 = 0$   
 $(x - 1)^2 = 0$   
 $\therefore x = 1$  (중근)  
따라서,  $-1 \times 3 \times 1 = -3$

7. 방정식  $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서  
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$   
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$   
 $x^2 = t$ 로 치환하면  
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$   
 $\therefore t = 3$  또는  $t = -1$   
( i )  $x^2 = 3$  일 때,  $x = \pm \sqrt{3}$   
( ii )  $x^2 = -1$  일 때,  $x = \pm i$   
( i ), ( ii )에서 실근의 합을 구하면  
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

8. 삼차방정식  $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$ 의 한 근이  $4 - 2\sqrt{2}$ 일 때, 유리수  $m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면  
 $(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$   
이 식을 정리하면  
 $(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$   
무리수가 서로 같은 조건에 의하여  
 $260 - 26m = 0$ ,  $160 - 16m = 0$   
따라서,  $m = 10$   
계수가 유리수인 방정식이므로  $4 - 2\sqrt{2}$ 가 근이면  $4 + 2\sqrt{2}$ 도 근이다.  
나머지 한 근을  $\alpha$ 라고 하면 근과 계수와의 관계에서  
 $(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$   
 $(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$   
 $\textcircled{㉠}$ 에서  $\alpha = m - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$   
 $\textcircled{㉡}$ 에서  $8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$   
 $\textcircled{㉢}$ 을  $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면  $8(m - 8) = 2m - 4$   
 $\therefore m = 10$



9.  $x$ 에 대한 삼차방정식  $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 의 근이 모두 실근이 되도록 하는 실수  $k$ 의 값의 범위는?

①  $-1 \leq k$

②  $1 \leq k < 2$

③  $k > 0$

④  $-1 < k \leq \frac{1}{4}$

⑤  $k \leq \frac{1}{4}$

해설

방정식  $x^3 + 2x^2 + (k+1)x + k = 0$ 을 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$(x+1)(x^2+x+k) = 0$$

이 때, 주어진 방정식의 모든 근이 실근이 되려면

방정식  $x^2+x+k=0$ 이 실근을 가져야 하므로

$$D = 1^2 - 4k \geq 0$$

$$\therefore k \leq \frac{1}{4}$$

10. 삼차방정식  $x^3 + ax^2 + bx - 3 = 0$  의 한 근이  $1 + \sqrt{2}i$  일 때, 두 실수  $a, b$  의 곱  $ab$  의 값은? (단,  $i = \sqrt{-1}$ )

① -15      ② -10      ③ 0      ④ 5      ⑤ 10

해설

한 근이  $1 + \sqrt{2}i$  이므로 켤레근은  $1 - \sqrt{2}i$   
세 근이  $\alpha, \beta, \gamma$  일때  $\alpha\beta\gamma = 3$  이므로,  $\alpha = 1 + \sqrt{2}i, \beta = 1 - \sqrt{2}i$   
라 하면,  $(1 + \sqrt{2}i)(1 - \sqrt{2}i) \cdot \gamma = 3$   
 $3 \cdot \gamma = 3$   
 $\gamma = 1$   
 $\alpha + \beta + \gamma = -a = (1 + \sqrt{2}i) + (1 - \sqrt{2}i) + 1 = 3$   
 $a = -3$   
 $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\beta = b = 3 + (1 - \sqrt{2}i) \cdot 1 + 1 \cdot (1 + \sqrt{2}i) = 5$   
 $b = 5$   
 $\therefore ab = (-3) \cdot 5 = -15$

11. 방정식  $x^3 - ax^2 + bx - 4 = 0$  의 한 근이  $1 + i$  일 때, 실수  $a + b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

실수 계수의 방정식에서  $1 + i$  가 근이면  $1 - i$  도 근이다. 이들을 두 근으로 하는 이차방정식은  $x^2 - 2x + 2 = 0$  이다. 따라서  $x^3 - ax^2 + bx - 4$  는  $x^2 - 2x + 2$  로 나누어 떨어진다. 실제로 나누어 나머지를 구하면  $(b - 2a + 2)x + (-8 + 2a)$  이다.  
 $\therefore b - 2a + 2 = 0$  과  $-8 + 2a = 0$  에서  $a = 4$ ,  $b = 6$  이다.  
 $\therefore a + b = 4 + 6 = 10$

12.  $x+y=1$ ,  $xy=1$ 인 두 복소수  $x, y$ 에 대하여,  $x^{2008}+y^{2008}$ 의 값은?

- ① 1                      ② 2                      ③ -1                      ④ -2                      ⑤ 0

해설

$x, y$ 는  $t^2 - t + 1 = 0$ 의 두 허근이므로  
 $(t+1)(t^2 - t + 1) = 0$   
 $\therefore t^3 + 1 = 0$   
 $\therefore t^3 = -1$   
 $x, y$ 는  $t^3 + 1 = 0$ 의 두 허근이므로  
 $x^3 = -1, y^3 = -1$   
 $\therefore x^{2008} + y^{2008} = (x^3)^{669} \cdot x + (y^3)^{669} \cdot y$   
 $= -(x + y) = -1$



13.  $x^3 = 1$ 의 한 허근을  $w$ 라 할 때,  $1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6 = aw + b$ 를 만족하는 실수  $a, b$ 를 구하면?

- ①  $a = -1, b = 2$       ②  $a = 2, b = -3$       ③  $a = -3, b = 1$   
④  $a = -1, b = 1$       ⑤  $a = 1, b = 2$

해설

$x^3 - 1 = 0$ 에서  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$   
 $\therefore x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 허근이  $w$ 이다.  
 $\therefore w^3 = 1, w^2 + w + 1 = 0$   
 $\Rightarrow w^2 = -w - 1$   
 $\therefore 1 + 2w^4 + 3w^5 + 4w^6$   
 $= 1 + 2w + 3w^2 + 4$   
 $= 1 + 2w + 3(-w - 1) + 4$   
 $= -w + 2$   
 $\therefore -w + 2 = aw + b$   
 $a, b$ 는 실수이고,  $w$ 는 허수이므로  
 $a = -1, b = 2$

14. 삼차방정식  $x^3 = 1$ 의 한 허근을  $w$ 라 할 때,  $-\frac{w+1}{w^2} + \frac{1+w^2}{w}$ 의 값을 구하면?

① 0                      ② 1                      ③ -1                      ④ 2                      ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned}x^3 &= 1, \\x^3 - 1 &= (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \\w &\text{는 } x^2 + x + 1 = 0 \text{의 한 근이 된다.} \\ \text{즉, } w^3 &= 1, \quad w^2 + w + 1 = 0 \\ -\frac{w+1}{w^2} + \frac{1+w^2}{w} & \\ &= \frac{w^2}{w^2} + -\frac{w}{w} \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

15. 다음 세 개의 방정식이 공통근을 가질 때,  $ab$ 의 값은?

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, \quad x^3 + 2x^2 + ax + b = 0, \quad x^2 + bx + a = 0$

- ①  $-1$
- ②  $3$
- ③  $-\frac{9}{4}$
- ④  $\frac{9}{16}$
- ⑤  $-\frac{81}{16}$

해설

$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$ 의 좌변을 인수분해하면  $(x - 1)^2(x + 3) = 0$  ∴  $x = 1$  또는  $x = -3$

( i ) 공통근이  $x = 1$ 인 경우 나머지 두 방정식에  $x = 1$ 을 대입하면 두 식을 동시에 만족하는  $a, b$ 값은 없다.

( ii ) 공통근이  $x = -3$ 인 경우 다른 두 방정식은  $x = -3$ 을 근으로 하므로  $\{-27 + 18 - 3a + b = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉠}}$

$\{9 - 3b + a = 0\} \cdots \cdots \textcircled{\tiny{㉡}}$

①, ②을 연립하여 풀면  $a = -\frac{9}{4}, \quad b = \frac{9}{4}, \quad ab = -\frac{81}{16}$

16. 사차방정식  $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1 = 0$ 의 한 근을  $\alpha$ 라 할 때,  $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

먼저 주어진 방정식을  $x^2$ 으로 나누면

$$\text{방정식은 } x^2 - 6x + 11 - \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0 \text{이 된다.}$$

이 식에  $\alpha$ 를 넣어도 성립하므로

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{를 } t \text{로 치환하면}$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \text{는 } 3 \text{이 된다.}$$

$$\text{따라서 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$$



17. 다음 방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 5x + 1 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

$x = 0$ 을 대입하면  
 $1 = 0$ 이 되어 모순이므로  $x \neq 0$ 이다.  
따라서, 주어진 식의 양변을  
 $x^2$ 으로 나누면  
$$x^2 + 5x - 12 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$
$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 12 = 0$$
$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0$$
여기서  $x + \frac{1}{x} = X$ 로 놓으면  
$$X^2 + 5X - 14 = 0, (X + 7)(X - 2) = 0$$
$$\therefore X = -7 \text{ 또는 } X = 2$$
( i )  $X = -7$ 일 때,  
 $x + \frac{1}{x} = -7$ 에서  
$$x^2 + 7x + 1 = 0$$
$$\therefore \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
( ii )  $X = 2$ 일 때,  
 $x + \frac{1}{x} = 2$ 에서  
$$x^2 - 2x + 1 = 0, (x - 1)^2 = 0$$
$$\therefore x = 1$$
( i ), ( ii )로부터  
$$x = 1(\text{중근}) \text{ 또는 } x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$
따라서, 모든 근의 합은  
$$1 + \frac{-7 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} = -6 \text{이다.}$$

18. 계수가 실수인 사차방정식  $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이  $1 + 2i$ 일 때, 두 실수  $a, b$ 의 합  $a + b$ 의 값은?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

한 근이  $1 + 2i$ 이면  $x = 1 + 2i, x^2 = -3 + 4i, x^3 = -11 - 2i, x^4 = -7 - 24i,$   
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$   
 $= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$   
 $(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$   
 $\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$   
연립하여 풀면  $a = 2, b = 0$

해설

$x = 1 + 2i$ 에서  $x^2 - 2x + 5 = 0$   
 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$   
좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면  
 $a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$   
 $\therefore k = 4, a = 2, b = 0$

19. 계수가 실수인 사차방정식  $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$ 의 한 근이  $1 + 2i$ 일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4      ② -3      ③ 0      ④ 3      ⑤ 4

해설

두 허근은  $1 + 2i$ ,  $1 - 2i$  나머지 두 실근을  $\alpha, \beta$ 라 하면  
네 근의 합 :  $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$   
 $\therefore$  두 실근의 합 :  $\alpha + \beta = -4$

20. 방정식  $x^3 = 1$ 의 한 허근을  $w$ 라 하고  
 $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 라 할 때,  $z\bar{z}$ 의 값을 구하면?

(단,  $\bar{z}$ 는  $z$ 의 켤레복소수이다)

- ①  $\frac{1}{2}$
- ②  $\frac{1}{3}$
- ③  $\frac{3}{4}$
- ④  $\frac{4}{5}$
- ⑤  $\frac{3}{7}$

해설

$x^3 - 1 = 0(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$ 에서  
 $w, \bar{w}$ 는  $x^2 + x + 1 = 0$ 의  
두 근이므로 근과 계수의 관계에서  
 $w + \bar{w} = -1, w\bar{w} = 1$   
또한,  $z = \frac{\omega + 1}{2\omega + 1}$ 에서  $\bar{z} = \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1}$ 이므로  
$$z\bar{z} = \frac{w + 1}{2w + 1} \times \frac{\bar{w} + 1}{2\bar{w} + 1}$$
$$= \frac{w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 1}{4w\bar{w} + 2(w + \bar{w}) + 1} = \frac{1 - 1 + 1}{4 - 2 + 1} = \frac{1}{3}$$

해설

$x^3 - 1 = 0, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$   
 $\therefore w^2 + w + 1 = 0, w = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 라 하자  
$$z = \frac{w + 1}{2w + 1} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}i - 3}{6} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6}$$
$$z\bar{z} = \frac{3 - \sqrt{3}i}{6} \times \frac{3 + \sqrt{3}i}{6} = \frac{9 + 3}{36} = \frac{1}{3}$$