1. $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 6\}$
집합 A 의 원소의 개수가 4개이므로 부분집합의 개수는 $2^4 = 16$ 개

2. 집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 의 부분집합 중에서 원소 3 을 포함하지 않는 부분집합으로 옳은 것은?

① $\{1,\ 3\}$ ② $\{1,\ 5\}$ ③ $\{2,\ 5\}$
④ $\{1,\ 2,\ 5\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

해설

원소 3 을 제외한 $\{1,\ 5\}$ 의 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{5\}$,$\{1,\ 5\}$ 이고, 그것이 원소 3 을 포함하지 않는 집합 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 의 부분집합이다.

3. 집합 $A = \{m, a, t, h\}$에 대하여 부분집합 중 모음을 원소로 포함하지 않는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8개

해설

집합 A에서 모음은 a이므로 집합 A의 부분집합 중 a를 포함하지 않는 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{m\}$, $\{t\}$, $\{h\}$, $\{m, t\}$, $\{m, h\}$, $\{t, h\}$, $\{m, t, h\}$이고 총 8개이다.

4. 두 집합 $A=\{3,5\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$에 대하여 $A \subset X \subset B$를 만족하는 집합 X의 개수를 모두 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설

$A \subset X \subset B$는 집합 B의 부분집합 중 집합 A의 원소를 반드시 포함하는 부분집합을 나타낸다.
따라서 $\{3,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$이므로 개수는 8개이다.

5. 두 집합 $A=\{x,\ 7\}$, $B=\{3,\ x+4\}$에 대하여 $A=B$일 때, x의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$A=B$이면 두 집합의 모든 원소가 같다.
따라서 $x=3$이다.

6. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ 일 때, $A - B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{1, 5, 7\}$

해설

$A \cap B = \{2, 4, 8\}$ 이므로 $A - B = \{1, 5, 7\}$

7. 두 집합 $B = \{x \mid x$는 4의 배수$\}$, $A = \{x \mid x$는 8의 배수$\}$ 일 때, $A - B$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\varnothing$

해설

$A \subset B$ 이므로 $A - B = \varnothing$ 이다.

8. $x \geq 0,\ y \geq 0$이고 $x+3y=8$일 때, $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

$x,\ y$가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(\sqrt{x}+\sqrt{3y})^2 \leq (1^2+1^2)\left\{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{3y})^2\right\}$
$=2(x+3y)$
$=16$ (단, 등호는 $x=3y$일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x}+\sqrt{3y} \geq 0$이므로
$0 \leq \sqrt{x}+\sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x}+\sqrt{3y}$의 최댓값은 4이다.

9. 다음 중 옳지 <u>않게</u> 연결된 것은?

① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1, 3, 5\}$

② $\{x \mid x$는 10이하의 홀수$\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

③ $\{x \mid x$는 12의 약수$\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

④ $\{x \mid x$는 20미만의 4의 배수$\} = \{4, 8, 12, 16\}$

⑤ $\{x \mid x = 2 \times n + 1,\ 1 \le n \le 3,\ n$은 자연수$\} = \{3, 5, 7\}$

해설

① $\{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\} = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다.

10. 세 집합

$A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$,

$B=\left\{x \mid x\text{는 20 이하의 소수}\right\}$,

$C=\left\{x \mid x\text{는 15의 약수}\right\}$ 일 때,

$n(A)+n(B)+n(C)$ 의 값을 구하여라.

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

$C=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

$\therefore\ n(A)+n(B)+n(C)=5+8+4=17$

11. 집합 $A = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{1\} \in A$　　② $2 \in A$　　③ $\{1, 2\} \subset A$

④ $\{\{1\}, \{2\}\} \subset A$　　⑤ $\varnothing \in A$

해설

⑤ $\varnothing \subset A$

12. 집합 $A=\{1,2,3,4\}$ 일 때, 다음 중 A 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\{1\}$ ② $\varnothing$ ③ $\{1,2,4\}$
④ $\{0\}$ ⑤ $\{1,2,3,4\}$

해설

집합 A 의 부분집합을 구하면
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$

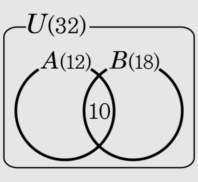
13. 수정이네 반 32 명의 학생 중에서 할머니, 할아버지와 함께 사는 학생을 조사해보았다. 할머니와 함께 사는 학생은 12 명, 할아버지와 함께 사는 학생은 18 명, 할머니와 할아버지 모두 함께 사는 학생은 10 명이었다. 할머니나 할아버지와 함께 사는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: ______ 명

▷ 정답: 20 명

해설

할머니와 함께 사는 학생들의 모임을 A, 할아버지와 함께 사는 학생들의 모임을 B 라고 할 때, 주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. 할머니나 할아버지와 함께 사는 학생은 $A \cup B$ 이다.



$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 12 + 18 - 10 \\ &= 20(\text{명}) \end{aligned}$$

따라서 할머니나 할아버지와 함께 사는 학생은 모두 20 명이다.

14. 세 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{3, 4, 8, 9\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 $(A \cap B) - C$ 는?

① $\{4\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{4, 8\}$
④ $\{2, 8\}$ ⑤ $\{2, 4, 8\}$

해설

$(A \cap B) - C = \{4, 8\} - \{1, 2, 3, 5\} = \{4, 8\}$ 이다.

15. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $p \to q$ 가 거짓임을 보이는 반례가 속하는 집합은?

① $P \cap Q$ ② $P \cup Q$ ③ $P^c \cup Q^c$
④ $P - Q$ ⑤ $Q - P$

해설

$p \to q$ 가 거짓임을 보이려면 P 의 원소 중에서 Q 의 원소가 아닌 것을 찾으면 된다. 따라서, 반례가 속하는 집합은 $P \cap Q^c = P - Q$

16. 실수 a, b 에 대하여 다음 중 $|a-b| > |a|-|b|$ 가 성립할 필요충분조건인 것은?

① $ab \leq 0$　　② $ab \geq 0$　　③ $a+b \geq 0$

④ $ab < 0$　　⑤ $a-b > 0$

해설

$|a-b| > ||a|-|b||$ 에 대하여

$(a-b)^2 - (||a|-|b||)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 - 2|a||b| + b^2)$

$= -2ab + 2|a||b| > 0$ 이려면

a 와 b 가 서로 부호가 반대이어야 한다.

따라서 $ab < 0$

17. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

18. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수를 a, 일대일 대응의 개수를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=64$

해설

정의역과 공역의 개수가 다르므로
일대일 대응은 없고, 정의역의 개수가 A
공역의 개수가 B 일 때 함수 개수는 B^A 이다.
$\therefore\ 4^3 = 64$
$\therefore\ a+b=64$

19. 다음 보기는 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)$ 를 나타낸 것이다. 역함수가 존재하는 것을 모두 고르면 무엇인가?

㉠ $f(x) = \begin{cases} x^2 \ (x \geq 0) \\ x \quad (x < 0) \end{cases}$

㉡ $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \ \ (x \geq 1) \\ 1 - x \quad (x < 1) \end{cases}$

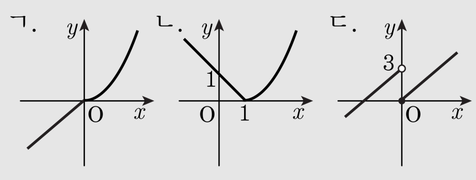
㉢ $f(x) = \begin{cases} x \quad\ (x \geq 0) \\ x + 3 \ (x < 0) \end{cases}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

함수 $f(x)$ 가 일대일대응일 때
역함수가 존재한다.
이 때, 보기의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서, 함수 ㄱ이 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

20. 함수 $f(x) = ax+3$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1} = f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면
$f^{-1} \circ f = f \circ f$
이때, $f^{-1} \circ f = I$(I는항등함수) 이므로 $f \circ f = I$
즉 $(f \circ f)(x) = x$
$\therefore (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax+3)$
$= a(ax+3)+3 = a^2x+3a+3 = x$
따라서 $a^2 = 1,\ 3a+3 = 0$ 이므로 $a = -1$

21. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.
$\therefore$ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
$\therefore$ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
$\therefore$ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
$\therefore\ g = f^{-1}$　$\therefore$ 옳다.

22. 두 함수 f, g 가 $f(2)=3$, $g^{-1}(1)=4$ 일 때, $f^{-1}(3)+g(4)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(2)=3$ 에서 $f^{-1}(3)=2$ 이고
$g^{-1}(1)=4$ 에서 $g(4)=1$ 이므로
$f^{-1}(3)+g(4)=2+1=3$

23. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ a\}$, $B=\{2,\ 3,\ a+1\}$ 에 대하여 $A\cap B=\{2,\ 3\}$ 일 때, 집합 $A\cup B$는?

① $\{2,3\}$ ② $\{2,3,4\}$ ③ $\{3,4,5\}$
④ $\{1,2,3,4\}$ ⑤ $\{1,2,3\}$

해설

$A\cap B=\{2,\ 3\}$ 이므로 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$
따라서 $a=3$ 이다. $B=\{2,\ 3,\ 4\}$
$\therefore\ A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

24. 다음 중 참인 명제는?

① 2 는 홀수이다.

② $\sqrt{2}$ 는 유리수이다.

③ 99 는 100 보다 작다.

④ $\varnothing$ 은 무한집합이다.

⑤ 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이다.

해설

③ 99 는 100 보다 작은 것이 사실이므로 참이다.

25. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

26. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$일 때, $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

산술-기하평균 부등식에 의해

$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b}{a} \times \frac{c}{b} \times \frac{a}{c}} = 3$

$\therefore \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq 3$

27. 두 함수 $f(x)=x+3,\ g(x)=2x-1$ 에 대하여 $(f\circ g)(x)$ 를 구하면?

① $(f\circ g)(x)=2x+5$
② $(f\circ g)(x)=2x+2$
③ $(f\circ g)(x)=x$
④ $(f\circ g)(x)=-x+1$
⑤ $(f\circ g)(x)=3x-4$

해설

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x-1)=(2x-1)+3=2x+2$

28. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$
$\therefore a + b = 2$

29. 함수 f에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f^2 \circ f = f^3$, $\cdots$, $f^n \circ f = f^{n+1}$ 이라고 정의한다. $f(x) = x - 1$일 때, $f^{1998}(1)$의 값은?

① -1998 ② -1997 ③ 0
④ 1 ⑤ 1998

해설

$f(x) = x - 1$
$f^2(x) = f(f(x)) = (x-1) - 1 = x - 2$
$f^3(x) = f^2(f(x)) = (x-1) - 2 = x - 3$
$\vdots$
$f^n(x) = x - n$ (n은 정수)
$f^{1998}(x) = x - 1998$
$\therefore\ f^{1998}(1) = -1997$

30. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x) = y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수는

$x = \dfrac{2y+1}{y-1}$ 에서

$x(y-1) = 2y+1$, $xy - x = 2y+1$, $xy - 2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

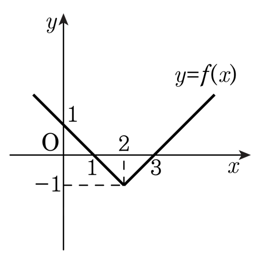
$\therefore\ y = \dfrac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$

$= \dfrac{ax+b}{x+c}$

즉, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$

$\therefore\ a+b+c = 0$

31. 함수 $f(x) = | x - 2 | -1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(0) = 0$
㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
㉣ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉡, ㉢　③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

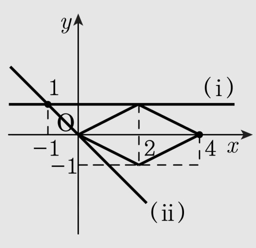
해설

㉠ $f(0) = 1$
㉡ $f(1) = 0,\ f(3) = 0$ 이므로
$f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
㉣ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

32. $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프와 직선 $y=mx+m+1$ 이 만나도록 하는 m 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설



함수 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 $|x|+2|y|=2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
이때, $|x|+2|y|=2$ 의 그래프는 $x+2y=2$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분을 각각 x 축, y 축, 원점에 대하여 대칭이동한 것이고, 이를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면 $|x-2|+2|y|=2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.
직선 $y=mx+m+1$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $(-1,\ 1)$ 을 지나므로 두 그래프가 만나려면
(ⅰ) $m \leq 0$
(ⅱ) $y=mx+m+1$ 이 원점을 지날 때
$0=m+1$ 에서 $m=-1$ 이므로 $m \geq -1$
(ⅰ), (ⅱ) 에서 m 의 값의 범위는 $-1 \leq m \leq 0$
따라서 m 의 최댓값과 최솟값의 합은 -1 이다.

33. 두 집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $B = \{c,\ e\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 8 개

해설

집합 X 는 원소 c 를 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$n(X) = 2^3 = 8$ (개)

34. 등식 $(A-B)-C=A-(B\cup C)$ 를 증명하는 데 꼭 필요한 것을 다음 중에서 모두 고르면?

㉠ 교환법칙	㉡ 결합법칙
㉢ 분배법칙	㉣ 흡수법칙
㉤ 드 모르간의 법칙	㉥ $X-Y=X\cap Y^c$

① ㉡, ㉤, ㉥ ② ㉠, ㉡, ㉢, ㉥ ③ ㉣, ㉤, ㉥
④ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$(A-B)-C=(A\cap B^c)-C$ ⋯㉥
$=(A\cap B^c)\cap C^c$ ⋯㉥
$=A\cap(B^c\cap C^c)$ ⋯㉡
$=A\cap(B\cup C)^c$ ⋯㉤
$=A-(B\cup C)$ ⋯㉥
따라서 ㉡, ㉤, ㉥이다.

35. $U = \left\{x | 0 \le x \le 12,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 두 부분집합 $A = \left\{x | x\text{는 12 이하의 4의 배수}\right\}, B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 에 대하여 $n\left((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)\right)$ 는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$A = \{4, 8, 12\}, B = \{3, 4, 7, 8, 11\}$ 이므로

$$n\left((A \cup B^c) \cup (B \cap A^c)\right) = n\left((A - B) \cup (B - A)\right)$$
$$= n\left(\{3, 7, 11, 12\}\right) = 4$$

36. 다음은 명제 '세 자연수 a, b, c에 대하여, $a^2+b^2=c^2$이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.'의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

> 주어진 명제의 대우는
> '세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2+b^2 \neq c^2$'이므로
> $a^2+b^2=3m+[\ ㉠\ ]$, $c^2=3n+[\ ㉡\ ]$
> $\therefore\ a^2+b^2 \neq c^2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가 [㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

① 1, 0, 참　② 1, 2, 거짓　③ 2, 1, 참
④ 2, 0, 참　⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 'a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2+b^2 \neq c^2$'
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
$a=3p\pm1$, $b=3q\pm1$, $c=3r\pm1$ 이면 $a^2=3(3p^2\pm2p)+1, b^2=3(3q^2\pm2q)+1$ 이므로
$a^2+b^2=3m+2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
$\therefore [\ ㉠\ ]=2$
그리고 $c^2=3(3r^2\pm2r)+1$ 이므로
$c^2=3n+1$ (n은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
$\therefore [\ ㉡\ ]=1$
$\therefore a^2+b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
$\therefore [\ ㉢\ ]=$ 참

37. 두 조건 $p : x \le 3-a$ 또는 $x \ge a$, $q : |x| \le 7$에 대하여 p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건일 때, 실수 a 의 값의 범위를 구하면? (단, $a \ge 3$)

① $a > 10$　　② $a > 7$　　③ $a > 3$

④ $a > -1$　　⑤ $a > -4$

해설

p 가 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로
$p \to \sim q$ 의 대우명제 $q \to \sim p$ 가 참이다.
p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
$Q \subset P^c$ 이므로
$P^c = \{x \mid 3-a < x < a\}$,
$Q = \{x \mid -7 \le x \le 7\}$ 이므로
$3-a < -7$, $a > 7$
따라서 $a > 10$,$a > 7$ 이므로 $a > 10$

38. $a>1$일 때 $b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$, $c=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)$이라 한다. a, b, c의 대소 관계로 옳은 것은?

① $a>b>c$　② $a>c>b$　③ $b>c>a$
④ $b>a>c$　⑤ $c>b>a$

해설

$b-a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)-a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-a\right)$

그런데, $a>1$이므로 $\frac{1}{a}-a<0$　$\therefore\ b<a$

또, $b=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)>\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=1$ $\left(\because\ a\neq\frac{1}{a}\right)$

$c-b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{1}{b}\right)-b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-b\right)<0$

$\therefore\ c<b$

$\therefore\ a>b>c$

39. $x > 2$ 일 때, $x + \dfrac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$x + \frac{1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2$$
$$\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2$$
$$= 2 + 2 = 4$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

40. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B = \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x) \neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개　② 18 개　③ 20 개　④ 24 개　⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ (가지)
그런데 $f(3) = 3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x) \neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24 - 6 = 18$ (가지)