1. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $A > B > 0$, $C > D > 0$ 이면 $AC > BD$ 이다.
② $A > B$, $C > D$ 이면 $A + C > B + D$ 이다.
③ $A > B > 0$ 이면 $A^2 > B^2$ 이다.
④ $A > B$ 이면 $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 이다.
⑤ $A > 0 > B$ 이면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 이다.

해설

④ 만약 $B < 0 < A$ 인 경우라면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 가 되어 주어진 문장은 틀리다.

2. 실수 a는 $0 < a < \frac{1}{2}$을 만족할 때, 다음 중 가장 큰 수를 구하시오.

① 0 ② 1 ③ $\frac{1}{a}$ ④ $\frac{1}{1-a}$ ⑤ $\frac{a}{1+a}$

해설

주어진 a 값의 범위를 이용하여 보기식의 값의 범위를 알아낸다.

③ $\frac{1}{\frac{1}{2}} < \frac{1}{a} < \frac{1}{0}$, $2 < \frac{1}{a}$

④ $-\frac{1}{2} < -a < 0$, $\frac{1}{2} < 1 - a < 1$

$1 < \frac{1}{1-a} < 2$

⑤(주어진 식)$=\frac{1+a-1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a}$ 에서

$1 < 1 + a < \frac{3}{2}$

$\frac{2}{3} < \frac{1}{1+a} < 1$

$0 < 1 - \frac{1}{1+a} < \frac{1}{3}$

3. x에 대한 부등식 $x+2 \le ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+2 \le ax+3$에서 $(1-a)x \le 1$이 부등식의 해가 모든 실수이고 우변이 양수이므로 x의 계수는 0이어야 한다.

$1-a=0$

$\therefore a=1$

4. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$
④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b \cdots$ ㉠
㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0 \cdots$ ㉡
㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로
$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ -a+2b=a+b$
$\therefore 2a=b \cdots$ ㉢
㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$
㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면
$(2a-3a)x+a+4a>0,\ -ax>-5a \ \therefore x>5$

5. 부등식 $|x+1|+|x-1| \ge 4$의 해는 $x \le a$ 또는 $x \ge b$이다. $a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

(i) $x < -1$

$-(x+1)-(x-1) \ge 4,\ x \le -2$

(ii) $-1 \le x < 1$

$x+1-(x-1) \ge 4$

$2 \ge 4$ (성립 안함)

(iii) $x \ge 1$

$x+1+x-1 \ge 4$

$x \ge 2$

(i), (iii)을 합하면 $x \le -2$ 또는 $x \ge 2$

$\therefore\ a+b=0$

6. 이차부등식 $x^2-6x+9\le 0$의 해를 구하면?

① $x\ge 3$ 또는 $x\le -3$
② x는 모든 실수
③ $x\ne 3$인 모든 실수
④ $x=3$
⑤ 해가 없다

해설

$x^2-6x+9\le 0$
$(x-3)^2\le 0$
$\Rightarrow x=3$

7. 부등식 $x^2+x+m \geq 0$의 x의 값에 관계없이 성립할 때, 실수 m의 최솟값은?

① -4　② 0　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

해설

$x^2+x+m \geq 0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면
$x^2+x+m=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=1^2-4m \leq 0$　$\therefore m \geq \frac{1}{4}$

따라서 실수 m의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

8. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$㈎
㈎를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot 2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1,2,3,\cdots,9$의 9개이다.

9. 부등식 $ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 일 때 부등식 $cx^2-bx+a>0$ 의 해는?

① $x<-\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x>-\frac{1}{\beta}$

② $x<-\frac{1}{\beta}$ 또는 $x>\frac{1}{\alpha}$

③ $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

④ $\frac{1}{\alpha}<x<\frac{1}{\beta}$

⑤ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $\alpha<x<\beta$ 이므로
$a<0$ 이다. 해가 $0<\alpha<x<\beta$ 이고
이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
양변에 a 를 곱하면
$a(x-\alpha)(x-\beta)>0$
$ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta>0$
$\therefore\ b=-a(\alpha+\beta),\ c=a\alpha\beta$
따라서 $cx^2-bx+a>0$ 에 대입하면
$a\alpha\beta x^2+a(\alpha+\beta)x+a>0$
$\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$
$(\alpha x+1)(\beta x+1)<0$
$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}\ (\because 0<\alpha<\beta)$

10. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면
$-8 \le x^2-8 \le 8$
$0 \le x^2 \le 16$
$\therefore -4 \le x \le 4$
$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면
$-k < x-2 < k$
$-k+2 < x < k+2$
이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면
$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로
$k \le 6,\ k \le 2$
$\therefore 0 < k \le 2$
따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

11. $ax^2-2ax+3<0$를 만족하는 x가 없도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $a>0$ ② $-1<a<3$ ③ $0\le a\le 3$
④ $-1<a<4$ ⑤ $-1\le a\le 4$

해설

(ⅰ) $a=0$일 때, 성립한다.
(ⅱ) $a\ne 0$일 때, 함수 $y=ax^2-2ax+3$에서 $D\le 0$이므로
$a^2-3a\le 0$
$\therefore 0<a\le 3(\because a\ne 0)$

12. 다음 부등식을 동시에 만족하는 정수 x의 개수는?

$$x^2 < 3x + 40\ ,\ 3x^2 - 7x \geq 40$$

① 4개　② 5개　③ 6개　④ 7개　⑤ 8개

해설

$x^2 < 3x + 40$,　$x^2 - 3x - 40 < 0$,
$(x-8)(x+5) < 0$,　$-5 < x < 8$
$3x^2 - 7x \geq 40$,　$3x^2 - 7x - 40 \geq 0$
$(3x+8)(x-5) \geq 0$,
$x \geq 5$ 또는 $x \leq -\dfrac{8}{3} \rightarrow$
공통범위는 $-5 < x \leq -\dfrac{8}{3}$,　$5 \leq x < 8$
정수는 $-4, -3, 5, 6, 7$: 5개이다.

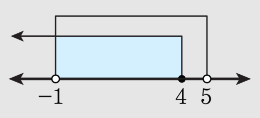
13. 연립부등식 $\begin{cases} 2x \le x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5 개

해설

㉠ $2x \le x+4$,
$\therefore x \le 4$
㉡ $x^2-4x-5<0$
$\Rightarrow (x-5)(x+1)<0$
$\therefore -1<x<5$



㉠, ㉡의 범위의
공통범위는 $-1<x\le 4$
$\therefore x=0,1,2,3,4$ 총 5 개

14. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1<x+1<x^2-3x+1 \\ x+3>-x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a<x<b$ 일 때, $2a+b$ 의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\begin{cases} \underbrace{\underbrace{x^2-1 < x+1}_{(가)} < x^2-3x+1}_{(나)} \\ x+3 > -x+2 \cdots(다) \end{cases}$

(가)에서 $x^2-x-2<0, (x-2)(x+1)<0$

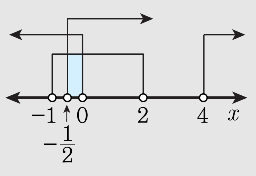
$\therefore -1<x<2$

(나)에서 $x^2-4x>0, x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x>-1$

$\therefore x>-\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2}<x<0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}, b=0$이므로 $2a+b=-1+0=-1$

15. 부등식 $(a-b)x+(b-2a)>0$의 해가 $x>\frac{3}{2}$일 때, 부등식 $ax^2+(a+2b)x+(a+3b)<0$의 해를 구하면?

① $3<x<7$ ② $-3<x<1$ ③ $x<2,\ x>3$
④ $-1<x<2$ ⑤ $x<-2,\ x>4$

해설

$(a-b)x>2a-b$의 해가 $x>\frac{3}{2}$이려면
$a-b>0,\ \frac{2a-b}{a-b}=\frac{3}{2}$이어야 한다.
$\therefore\ a=-b,\ \ b<0$
준 부등식 $-bx^2+bx+2b<0$에서
$x^2-x-2<0,\ (x-2)(x+1)<0$
$\therefore\ -1<x<2$

16. x 에 관한 부등식 $(a-1)x^2+(b+1)x+6>0$ 의 해가 $-3<x<1$ 일 때, ab 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$(a-1)x^2+(b+1)x+6>0 \Leftrightarrow -3<x<1$

$x^2+\frac{b+1}{a-1}x+\frac{6}{a-1}<0 \quad (a-1<0)$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-1)<0$, $x^2+2x-3<0$

$\frac{b+1}{a-1}=2$, $\frac{6}{a-1}=-3$

$\therefore\ a=-1, b=-5$

$\therefore\ ab=5$

17. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0$ ······㉠
해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면
$x^2-5x+6<0$ ······㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2+5x-6>0$ ······㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

18. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면
$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로
$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

19. 다음은, 둘레의 길이가 28 cm 이고 넓이가 45 cm^2 이상인 직사각형에서 가로의 길이의 범위를 구하는 문제의 풀이 과정이다.

> 가로의 길이를 x cm 라고 하면, 세로의 길이는 ㈎ cm 이다.
> 이때, x 의 값의 범위는 ㈏이다.
> 또 직사각형의 넓이는 (가로)(세로)$=$ x ㈎이다.
> 이것이 45 cm^2 이상이 되어야 하므로 $x\times$ ㈎ $\geq$ ㈐
> 이식을 정리하면 ㈑ ≤ 0
> ㈑를 인수분해하면 ㈒이다.
> 따라서 가로의 길이를 5 cm 이상, 9 cm 이하로 하면 문제의 뜻에 맞는다.

다음 중 ㈎, ㈏, ㈐, ㈑, ㈒ 에 들어갈 것으로 옳지 않은 것은?

① ㈎ $(14-x)$
② ㈏ $0 < x < 14$
③ ㈐ 45
④ ㈑ $14x - x^2 - 45$
⑤ ㈒ $(x-5)(x-9)$

해설

(사각형의 둘레의 길이)
$=$ 2(가로의 길이 $+$ 세로의 길이)
$28 = 2x + 2\cdot$㈎, $14 = x +$ ㈎
$\therefore$ ㈎ $= 14 - x$
가로의 길이의 범위 : $x > 0$, $14 - x > 0 \rightarrow x < 14$
$\therefore\ 0 < x < 14\ \cdots$ ㈏
직사각형의 넓이 : $x(14-x) \geq 45$
$\therefore$ ㈐ $= 45$
㈑ $= x^2 - 14x + 45 \leq 0$
㈒ $= (x-5)(x-9) \leq 0$

20. 연립이차부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x \le 0 \\ (x+1)(x-a) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $2 < x \le 5$이 되도록 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

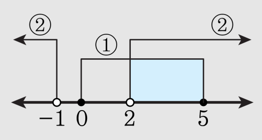
첫 번째 부등식을 풀면 $x^2 - 5x = x(x-5) \le 0$

$\therefore 0 \le x \le 5 \cdots\cdots$ ①

또, 두 번째 부등식은 조건을 만족하기 위해서 $a > -1$ 이어야 한다.

$\therefore x < -1, x > a \cdots\cdots$ ②

①, ②를 동시에 만족하는 해가 $2 < x \le 5$ 이므로 a의 값은 2이다.



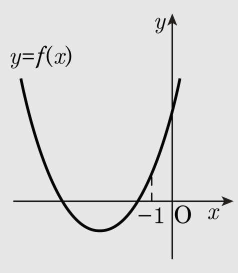
21. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(ⅰ) $\frac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서

$k^2+k-6>0$, $(k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ⅱ) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(ⅲ) $-\frac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$

이상에서 $-7<k<-3$

따라서 정수 k 는 -6, -5, -4 의 3 개다.

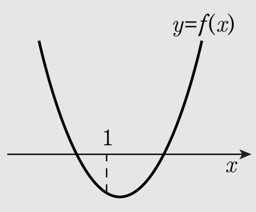
22. 이차방정식 $x^2 - mx + 4 = 0$ 의 두 근 사이에 1 이 있도록 하는 실수 m 의 값의 범위는?

① $m < -5$　　② $m > -2$　　③ $-2 < m < 2$

④ $m > 2$　　⑤ $m > 5$

해설

$f(x) = x^2 - mx + 4$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(1) < 0$ 에서 $5 - m < 0$

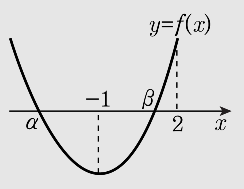
$\therefore\ m > 5$

23. 이차방정식 $x^2+2ax+a^2-1=0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha<-1<\beta<2$가 성립할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $-2<a<0$　② $-2<a<1$　③ $0<a<2$
④ $1<a<2$　⑤ $1<a<3$

해설

$f(x)=x^2+2ax+a^2-1$ 로 놓으면 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 되어야 한다.



즉, $f(-1)<0$, $f(2)>0$

(ⅰ) $f(-1)=1-2a+a^2-1<0$ 에서 $a^2-2a<0$, $a(a-2)<0$
$\therefore 0<a<2$

(ⅱ) $f(2)=4+4a+a^2-1>0$ 에서 $a^2+4a+3>0$, $(a+3)(a+1)>0$
$\therefore a<-3$, $a>-1$

(ⅰ), (ⅱ) 에서 $0<a<2$

24. 이차방정식 $x^2+ax-2=0$ 의 두 실근 α, β에 대하여 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이 성립하도록 하는 실수 a의 값의 범위는?

① $-\frac{13}{3}<a<-1$ ② $-\frac{10}{3}<a<0$ ③ $-\frac{7}{3}<a<1$
④ $-\frac{5}{3}<a<2$ ⑤ $-\frac{2}{3}<a<3$

해설

$f(x)=x^2+ax-2$ 로 놓으면 $-2<\alpha<0$, $1<\beta<3$ 이므로
$f(-2)>0$, $f(0)<0$, $f(1)<0$, $f(3)>0$ 이어야 한다.
$f(-2)=-2a+2>0$ 에서 $a<1$
$f(0)=-2<0$
$f(1)=a-1<0$ 에서 $a<1$
$f(3)=3a+7>0$ 에서 $a>-\frac{7}{3}$
$\therefore\ -\frac{7}{3}<a<1$

25. 이차방정식 $ax^2 - (a-3)x + a - 2 = 0$이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$이고
실근을 가지므로
$D = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$
$3a^2 - 2a - 9 \leq 0$
$\therefore \frac{1-\sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{28}}{3}$
$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로
a의 정수값은 $-1,\ 0,\ 1,\ 2$
그런데 $a \neq 0$이고 $a = 1$일 때는 정수근이 없다.
$\therefore\ a = -1,\ 2$이고 구하는 합은 1