1. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}\\ &= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\ &= x+1\\ &= 2006\end{aligned}$$

2. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$를 만족할 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 8　② 16　③ 24　④ 36　⑤ 42

해설

공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에 주어진 수를 대입하여
$(ab+bc+ca)$의 값을 구하면 $(ab+bc+ca)=12$
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
에서
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$
$\therefore\ a=b=c=2$이므로 $a^3+b^3+c^3=24$

3. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$일 때, a^5+b^5의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times 10-9\times 4\\ &= 244\end{aligned}$$

4. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　② 2　③ -2　④ -3　⑤ -1

해설

(i) 준식을 k에 관하여 정리하면
$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$
이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은
$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1,\ y = 0$
$\therefore\ A(1, 0)$

(ii) $\mathrm{A}(1,0), \mathrm{B}(b,1)$에서
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$
$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$
$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

5. $a+b+c=0$일 때, $\frac{a^2+1}{bc}+\frac{b^2+1}{ac}+\frac{c^2+1}{ab}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

(준식) $=\frac{a(a^2+1)+b(b^2+1)+c(c^2+1)}{abc}$

$=\frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}$

그런데, $a^3+b^3+c^3=3abc$이므로

$\therefore \frac{a^3+b^3+c^3+a+b+c}{abc}=\frac{3abc}{abc}=3$

6. 인수분해 공식 $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$을 이용하여 $\dfrac{9999^3+1}{9998\times9999+1}$을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10000

해설

$9999=a$라 하면

$$\frac{9999^3+1}{9998\times9999+1}=\frac{a^3+1}{(a-1)a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=10000$$

7. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

8. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n)\begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i ② $-i$ ③ 0 ④ $500i$ ⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$

$n=4k+1 \;\Rightarrow\; f(n)=-i^{4k+1}=-i$

$n=4k+2 \;\Rightarrow\; f(n)=2\pi$

$n=4k+3 \;\Rightarrow\; f(n)=-i$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$

계속 반복되므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$

$=i\times 501+f(2005)$

$=501i-i=500i$

9. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ ($x,\ y$ 는 실수)로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5} + i$
$x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2 - y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ 이므로
$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$
$x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5} - i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

10. $w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$w=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$\therefore\ (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$

$=(w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2$

$=(-w-2)^2+(w-1)^2$

$=w^2+4w+4+w^2-2w+1$

$=2w^2+2w+5$

$=2(w^2+w+1)+3$

$=3$

11. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② −12 ③ 15 ④ −15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore\ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because\ \omega$는 허수)

$\therefore\ a=6,\ b=9$

12. $x,\ y$ 에 대한 이차식 $f(x,\ y) = x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3$ 이 $x,\ y$ 의 두 일차식으로 인수분해될 때, 실수 k 의 값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + 2(y-1)x + y^2 + ky - 3 = 0$ 의 두 근을 구하면
근의 공식에 의하여
$x = -(y-1) \pm \sqrt{(y-1)^2 - (y^2 + ky - 3)}$
$\quad = -(y-1) \pm \sqrt{-(2+k)y + 4} \ \cdots\cdots$ ㉠
한편, $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이면
$x^2 + ax + b = (x-\alpha)(x-\beta)$ 이고
준식이 $x,\ y$ 의 일차식으로 인수분해되므로
x 의 두 근 ㉠에서 $-(2+k)y + 4$ 가 완전제곱 꼴이 되어야 한다.
따라서 근호 안의 판별식 D 는 0이어야 한다.
$\therefore\ D = (2+k)^2 - 4 \cdot 0 \cdot 4 = 0$
$2 + k = 0$
$\therefore\ k = -2$

13. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

14. x의 이차방정식 $x^2 + (2m-1)x + m^2 - m - 2 = 0$의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2 배일 때, 실수 m의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$D = (2m-1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0$이므로
서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 근을 $\alpha,\ 2\alpha$라 하면
$\alpha + 2\alpha = -(2m-1) > 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$m < -1 \quad \cdots\cdots$ ㉢
또, ㉠에서의 $\alpha = \dfrac{1-2m}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4,\ 5$
조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

15. 모든 실수 x에 대하여 이차함수 $y = x^2 - 2x + 2$ 의 그래프가 직선 $y = mx - 2$보다 위쪽에 있을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $-6 < m < 2$　② $-4 < m < 1$　③ $-2 < m < 0$
④ $2 < m < 5$　⑤ $4 < m < 6$

해설

모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2 - 2x + 2 > mx - 2$ 가 성립하므로
$x^2 - (m+2)x + 4 > 0$ 에서
이차방정식 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면
$D = (m+2)^2 - 16 < 0$
$(m+6)(m-2) < 0$
$\therefore -6 < m < 2$

16. 두 함수 $f(x) = |x-2| - 5,\ g(x) = x^2 + 6x + 8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$ 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2| - 5 = t$ 로 놓으면

$y = g(f(x)) = g(t) = t^2 + 6t + 8 = (t+3)^2 - 1$

그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로

y 의 값은 $t = -5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,

$t = -3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.

$\therefore M = 3,\ m = -1$

$\therefore M + m = 2$

17. $x^2 - 2x - y = 0$ 일 때, $3x^2 - 2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2 - 2x - y = 0$ 에서 $y = x^2 - 2x$
이 식을 $3x^2 - 2y$ 에 대입하면
$3x^2 - 2\left(x^2 - 2x\right) = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$
따라서, $x = -2$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

18. 실수 x, y 가 방정식 $x^2+2xy+2y^2+y-6=0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2+2yx+2y^2+y-6=0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4}=y^2-(2y^2+y-6)\geq 0$

$y^2+y-6\leq 0$, $(y+3)(y-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq y\leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

19. $x^3+1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 값을 차례대로 구하여라.

(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\cdot\overline{\omega}-\omega\cdot\overline{\omega}^{11}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

▷ 정답 : 2

해설

ω가 x^2-x+1의 근이므로
$\overline{\omega}$도 x^2-x+1의 근이다.
즉, $\omega^3=-1,\ \overline{\omega}^3$
$=-1,\ \omega^2-\omega+1=0$
(1) $\omega^{20}+\omega^{10}+1$
$=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega+1$
$=(-1)^6\cdot\omega^2+(-1)^3\cdot\omega+1$
$=\omega^2-\omega+1=0$

(2) $\omega^{101}+\overline{\omega}^{101}-\omega^{11}\overline{\omega}-\omega\overline{\omega}^{11}$
$=(\omega^3)^{33}\cdot\omega^2+(\overline{\omega}^3)^{33}\cdot\overline{\omega}^2-$
$\omega\overline{\omega}\left\{(\omega^3)^3\cdot\omega+(\overline{\omega}^3)^3\cdot\overline{\omega}\right\}$
$=(-1)\omega^2+(-1)\overline{\omega}^2-\left\{(-1)\omega+(-1)\overline{\omega}\right\}$
$=-(\omega^2-\omega)-(\overline{\omega}^2-\overline{\omega})$
$=-(-1)-(-1)=2$

20. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\alpha^2+\alpha+3k=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

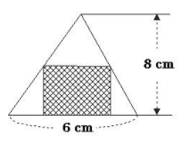
$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0 \quad \therefore\ k=-4$

$\therefore\ \alpha-k=7$

21. 철민이는 그림과 같이 밑변의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$, 높이가 $8\,\mathrm{cm}$ 인 삼각형 모양의 나무 판자를 가지고 있다. 이 판자를 그림과 같이 잘라 넓이가 $12\,\mathrm{cm}^2$ 인 직사각형 모양의 판자를 만들려고 한다. 이 때, 이 판자의 가로의 길이를 구하여 라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 3 cm

해설

삼각형에 내접하는 직사각형의 가로를 α , 세로를 β 라 하자.
닮음 조건에 의해 $\alpha : 8-\beta = 3 : 4$
$\Rightarrow \quad 3\beta = 24 - 4\alpha,$
넓이가 12 이므로 $\alpha\beta = 12$
$\therefore \ \alpha\beta = \alpha(8 - \frac{4}{3}\alpha) = 12, \ (\alpha - 3)^2 = 0$
$\therefore \ \alpha = 3$

22. 실수 x, y에 대하여 $2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$일 때, xy 의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

해설

$2x^2+y^2+2xy+2x-2y+5=0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2+2(y+1)x+y^2-2y+5=0 \quad \cdots$ ㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D=(y+1)^2-2\left(y^2-2y+5\right) \geq 0$
$-y^2+6y-9 \geq 0 \ \ (y-3)^2 \leq 0$
$\therefore y=3$
$y=3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2+8x+8=0,\ x^2+4x+4=0$
$(x+2)^2=0$
$\therefore\ x=-2\ \therefore\ xy=(-2)\cdot 3=-6$

23. $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta = m + 1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m = -1,\ 7$

24. x에 대한 다항식 $x^{10}(x^2+ax+b)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x-2)$일 때, 상수 a, b에 대하여 $3b-2a$의 값은?

① 3 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$x^{10}(x^2+ax+b)=(x-2)^2Q(x)+2^{10}(x-2)$
$x^{10}\left(x^2+ax+b\right)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$이므로
$x^2+ax+b=(x-2)(x-\alpha)$라 할 수 있다.
$x^{10}(x-2)(x-\alpha)=(x-2)\{(x-2)Q(x)+2^{10}\}$
$\therefore\ x^{10}(x-\alpha)=(x-2)Q(x)+2^{10}$
양변에 $x=2$를 대입하면
$2^{10}(2-\alpha)=2^{10}\ \therefore \alpha=1$
$\therefore\ x^2+ax+b=(x-2)(x-1)$
$\qquad\qquad\quad =x^2-3x+2$
$a=-3,\ b=2$
$\therefore\ 3b-2a=12$

25. x^{100}을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때, 나머지는?

① $100x+101$ ② $100x-99$ ③ $-100x-99$
④ $-99x-98$ ⑤ $99x+100$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면
$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+ax+b$
x^{100}을 $x+1$로 나누면 나머지는 1이므로
$x^{100}=(x+1)^2Q(x)+a(x+1)+1$ ($\Rightarrow a+1=b$)
$x^{100}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x^2)^{50}-1=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x^2-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$
$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x+1)(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}$
$=(x+1)\{(x+1)Q(x)+a\}$
$(x-1)\{(x^2)^{49}+(x^2)^{48}+\cdots+x^2+1)\}=(x+1)Q(x)+a$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$(-1-1)(1^{49}+1^{48}+\cdots+1+1)=a$
$a=-100$, $a+1=b$에서 $b=-99$
$\therefore$ 구하는 나머지는 $-100x-99$