1. $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_5의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
$\therefore\ a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. 수열 $\{a_n\}$이 다음을 만족할 때, a_3+a_4의 값은?

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{1}{6},\ a_{n+1}=\frac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}\,(n=1,\ 2,\ 3)$$

① $\frac{2}{9}$　② $\frac{5}{12}$　③ $\frac{7}{16}$　④ $\frac{5}{24}$　⑤ $\frac{7}{36}$

해설

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n\cdot a_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$ 로부터 수열 $\{a_n\}$은 조화수열이다. 따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이고, 이때, $\dfrac{1}{a_1}=3,\ \dfrac{1}{a_2}=6$이므로

$\dfrac{1}{a_n}=3+(n-1)\cdot 3=3n,\ a_n=\dfrac{1}{3n}$

$a_3=\dfrac{1}{9},\ a_4=\dfrac{1}{12}\quad\therefore\ a_3+a_4=\dfrac{7}{36}$

3. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로
a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 4 + (n-1) \cdot 3 \\ &= 4 + 3n - 3 \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$

$\therefore a_{10} = 31$

4. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 -3인 등차수열이므로
$a_n = 2 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 5$
$\therefore\ a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$

5. $a_1 = 1,\ a_{n+1} - a_n = 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{20} = \dfrac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$

6. $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = 2a_n$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2인 등비수열

$$\therefore a_n = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2}$$

7. $a_1 = 1,\ a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9\log_3 2$ ② $10\log_3 2$ ③ $11\log_3 2$

④ 9 ⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

$a_1 = 1,\ r = \dfrac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$

$\therefore\ \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9\log_3 3 = 9$

8. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_4의 값은?

① 26　② 31　③ 36　④ 46　⑤ 51

해설

$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n^2 - n$이므로 $a_2 = a_1^2 - 1 = 3$
$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 2 = 7$
$a_4 = a_3^2 - 1 = 7^2 - 3 = 46$

9. $a_{n+1} - a_n = 2(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}}$ 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이므로

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$

즉, $a_2 = a_1 + 2,\ a_3 = a_1 + 4,\ a_4 = a_1 + 6$

$\therefore \dfrac{2^{a_2} + 2^{a_4}}{2^{a_1} + 2^{a_3}} = \dfrac{2^{a_1+2} + 2^{a_1+6}}{2^{a_1} + 2^{a_1+4}}$

$= \dfrac{2^{a_1+2}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = \dfrac{2^2 \cdot 2^{a_1}(1+2^4)}{2^{a_1}(1+2^4)} = 2^2 = 4$

10. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29　　② 31　　③ 33　　④ 35　　⑤ 37

해설

$a_{n+1} = a_n + 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3 인 등차수열이다.
또한, $a_1 = 2$ 이므로
$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1 \quad \therefore\ a_{10} = 30 - 1 = 29$

11. $a_1 = 23$, $a_2 = 20$이고, $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_k = -115$일 때, 자연수 k의 값은?

① 43　　② 44　　③ 45　　④ 46　　⑤ 47

해설

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고
첫째항이 23, 공차가 $a_2 - a_1 = 20 - 23 = -3$이므로
$a_n = 23 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 26$
$-3k + 26 = -115$에서 $-3 = -141$
$\therefore\ k = 47$

12. $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=1$, $a_{n+9}-a_{n+2}=35$가 성립할 때, a_{100}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 496

해설

$2a_{n+2}=a_n+a_{n+2}$를 만족하는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 공차를 d라 하면

$a_{n+9}=a_{n+2}+7d$에서 $7d=35$

$\therefore\ d=5$

$\therefore\ a_{100}=1+99\cdot 5=496$

13. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$($n = 1, 2, 3, \cdots$)를 만족할 때, $S_5 = a_1 + a_2 + \cdots + a_5$의 값은?

① 31 ② 63 ③ 127 ④ 255 ⑤ 511

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$ 이므로 1이고, 공비는 2이다.

$\therefore S_5 = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$

14. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = \frac{1}{a_n}$이라 할 때, $a_{15}b_{20}$의 값은?

① 3 ② 9 ③ 27 ④ 81 ⑤ 243

해설

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \therefore\ b_n = 3^{n-1}$

$\therefore\ a_{15}b_{20} = \frac{1}{3^{14}} \cdot 3^{19} = 3^5 = 243$

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음과 같이 정의될 때, a_{10}의 값은?

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 3a_n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

① $2 \cdot 3^8$ ② $2 \cdot 3^9$ ③ $2 \cdot 3^{10}$
④ $2 \cdot 3^{11}$ ⑤ $2 \cdot 3^{12}$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$이므로 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, 9$를 대입하여 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \times \frac{a_7}{a_6} \times \frac{a_8}{a_7} \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = 3^9$$

$$\frac{a_{10}}{a_1} = 3^9$$

$$\therefore\ a_{10} = a_1 \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^9$$

16. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 를 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_1 + 1^2 \\ & a_3 = a_2 + 2^2 \\ & a_4 = a_3 + 3^2 \\ & \quad \vdots \\ +) & \underline{a_{10} = a_9 + 9^2} \end{array}$$

$a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2)$

$= 5 + \dfrac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6}$

$= 290$

17. $a_1 = -1,\ a_{n+1} = a_n + n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$a_2 = a_1 + 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$$\begin{array}{rl} & \vdots \\ + & a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ \hline & a_n = a_1 + 1 + \cdots + (n-1) \\ & \quad = -1 + \dfrac{(n-1)\cdot n}{2} \end{array}$$

$\therefore a_{10} = -1 + \dfrac{9 \cdot 10}{2}$

$= -1 + 45 = 44$

18. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2,\ a_n + a_{n+1} = 3n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의된다. 이때, 두 수 $P = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots + a_{19},\ Q = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + \cdots + a_{20}$에 대하여 $P - Q$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = 2,\ a_1 + a_2 = 3\ \therefore a_2 = 1$

$n = 2$일 때, $a_2 + a_3 = 6\ \therefore a_3 = 5$

$n = 3$일 때, $a_3 + a_4 = 9\ \therefore a_4 = 4$

$\therefore a_{2n-1} - a_{2n} = 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

$\therefore P - Q = \sum_{k=1}^{10}(a_{2n-1} - a_{2n}) = 10$

19. $a_1 = -10,\ a_{n+1} = a_n + n^2\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{11} 의 값은?

① 210 ② 275 ③ 310 ④ 375 ⑤ 425

해설

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ 꼴이면 $f(n)$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열임을 이용한다.

$a_{n+1} = a_n + n^2,\ a_{n+1} - a_n = n^2$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 $b_n = n^2$

$\therefore a_{11} = -10 + \sum_{k=1}^{10} k^2$

$= -10 + \dfrac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 375$

20. $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① 511　② 512　③ 513　④ 1023　⑤ 1025

해설

수열 $\{a_n\}$의 계차수열을 $\{b_n\}$이라 하면
$a_{n+1} - a_n = 2^n$ 이므로 $b_n = 2^n$
따라서 $n \geq 2$일 때,

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \dfrac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$ 이때, $a_1 = 1$은 ㉠을 만
$= 2^n - 1 \cdots\cdots$ ㉠

족시키므로 구하는 일반항은 $a_n = 2^n - 1$
$\therefore a_9 = 2^9 - 1 = 511$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 2$이고 $a_{n+1} - a_n = 2n - 5$일 때, a_{30}의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 727

해설

$a_{n+1} - a_n = b_n = 2n - 5$

$\therefore a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k - 5)$

$= 2 + 2 \times \dfrac{n(n-1)}{2} - 5(n-1)$

$= n^2 - 6n + 7$

$\therefore a_{30} = 30^2 - 6 \times 30 + 7 = 727$

22. $a_1=1,\ a_{n+1}=(n+1)a_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 수열 $\{a_n\}$이 정의될 때, a_n을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1}=(n+1)a_n$의 n에 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 차례로 대입하면
$a_2=2\cdot a_1=2\cdot 1=2$
$a_3=3\cdot a_2=3\cdot 2=6$
$a_4=4\cdot a_3=4\cdot 6=24$
$a_5=5\cdot a_4=5\cdot 24=120$

23. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \cdots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$a_2 = 2^1 a_1$

$a_3 = 2^2 a_2$

$a_4 = 2^3 a_3$

$\vdots$

$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$

$\therefore\ a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{10} = 2^{50}$ 이므로 $2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$

$a_1 = 2^5 = 32$

24. 모든 항이 양수이고, 임의의 자연수 $m,\ n$에 대하여 $a_{m+n} = 2a_m a_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$이 있다. $a_4 = 72$일 때, a_5의 값은?

① $72\sqrt{3}$　② $72\sqrt{6}$　③ 144

④ $144\sqrt{3}$　⑤ 216

해설

$a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 2,\ n = 2$를 대입하면 $a_4 = 2a_2 a_2 = 72,\ a_2^2 = 36$

$\therefore\ a_2 = 6 (\because\ a_n > 0)$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_n$에 $m = 1,\ n = 1$을 대입하면

$a_2 = a_{1+1} = 2a_1 a_1 = 6,\ a_1^2 = 3$

$\therefore\ a_1 = \sqrt{3}$

또, $a_{m+n} = 2a_m a_m a_n$에 $m = 4,\ n = 4$를 대입하면

$a_5 = a_{4+1} = 2a_4 a_1 = 2 \cdot 72 \cdot \sqrt{3} = 144\sqrt{3}$

25. $a_1 = 110$ 인 수열 $\{a_n\}$은 다음을 만족한다.

$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2 a_n (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$

a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = n^2 a_n \cdots\cdots$ ㉠

$S_{n-1} = (n-1)^2 a_{n-1}\ (n \geq 2) \cdots\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡에서 $S_n - S_{n-1} = a_n$ 이므로

$a_n = n^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1}$

$a_{n+1} = \dfrac{n}{n+2} a_n\ (n \geq 1)$

$\therefore a_n = a_1 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{5} \times \cdots \times \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-1}{n+1}\ \ \therefore a_{10} = 110 \times$

$= 110 \times \dfrac{2}{n(n+1)}$

$\dfrac{2}{110} = 2$

26. 다음은 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

$a_{n+1} - \boxed{(가)} = \frac{1}{2}(a_n - \boxed{(가)})$이므로
$a_n = \boxed{(가)} + (a_1 - \boxed{(가)})(\boxed{(나)})^{n-1}$

① $1,\ \frac{1}{2}$　② $1,\ 2$　③ $2,\ \frac{1}{2}$　④ $2,\ 2$　⑤ $3,\ \frac{1}{2}$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$에서

$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

이때, 수열 $\{a_n - 2\}$은 첫째항이 $a_1 - 2$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2 + (a_1 - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore$ (가) $= 2$, (나) $= \frac{1}{2}$

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 2a_n + 1$이 성립하고 $a_1 = 1$일 때, $a_{10} + 1$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1024

해설

$a_{n+1} - \alpha = 2(a_n - \alpha)$에서 $a_{n+1} = 2a_n - \alpha$이므로 $\alpha = -1$

$\therefore\ a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$

수열 $\{a_n + 1\}$은 첫째항이 $a_1 + 1 = 2$이고 공비 2인 등비수열이다.

$a_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$이므로

$a_{10} + 1 = 2^{10}$

28. $a_1 = 0,\ a_{n+1} = -a_n + 2$와 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하면?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)

① $1 + (-1)^n$　② $2 + (-1)^n$　③ $3 + (-1)^n$

④ $4 + (-1)^n$　⑤ $5 + (-1)^n$

해설

$a_{n+1} = -a_n + 2$에서

$a_{n+1} - 1 = -(a_n - 1)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $a_1 - 1$, 공비가 -1인 등비수열이므로

$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot (-1)^{n-1} = (-1)^n$

$\therefore\ a_n = 1 + (-1)^n$

29. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 2a_n - 3(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{10}의 값은?

① $3-2^{12}$ ② $3-2^{11}$ ③ $3-2^{10}$
④ $3-2^{9}$ ⑤ $3-2^{8}$

해설

$a_{n+1} = 2a_n - 3$의 양변에 -3을 더하여 정리하면
$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$
즉, 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$, 공비가 2인 등비수열이므로
$a_n - 3 = (-1) \times 2^{n-1}$
$\therefore\ a_n = 3 - 2^{n-1}$
$\therefore\ a_{10} = 3 - 2^{9}$

30. $a_1 = 5,\ a_{n+1} = 3a_n + 2(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{20}의 값은?

① $2 \cdot 3^{19} - 1$ ② $2 \cdot 3^{19} + 1$ ③ $2 \cdot 3^{20} - 1$
④ $2 \cdot 3^{20} + 1$ ⑤ $2 \cdot 3^{21} - 1$

해설

$a_{n+1} - \alpha = (a_n - \alpha)$꼴로 변형한다.
$a_{n+1} - \alpha = 3(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면
$a_{n+1} = 3a_n - 2\alpha$에서
$-2\alpha = 2 \ \therefore \alpha = -1$
즉, $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$
따라서 수열 $\{a_n + 1\}$은
첫째항이 $a_1 + 1 = 5 + 1 = 6$이고 공비가 3인 등비수열이므로
$a_n + 1 = 6 \cdot 3^{n-1}$
$\therefore a_n = 6 \cdot 3^{n-1} - 1$
$\therefore a_{20} = 6 \cdot 3^{19} - 1 = 2 \cdot 3^{20} - 1$

31. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$일 때, 일반항 a_n은?

① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \frac{1}{2}$

④ 2^{n-1} ⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

32. 수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = \frac{1}{32}$, $\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} + \log_2 a_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의할 때, a_{101}의 값은?

① 2^{40}　② 2^{45}　③ 2^{50}　④ 2^{55}　⑤ 2^{60}

해설

$a_1 = \frac{1}{32}$, $\log_2 a_{n+1} = \frac{1}{2} + \log_2 a_n$에서 $\log_2 a_{n+1} = \log_2 \sqrt{2} + \log_2 a_n$

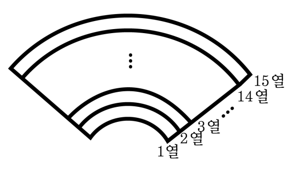
$\log_2 a_{n+1} = \log_2 \sqrt{2} a_n$　$\therefore a_{n+1} = \sqrt{2} a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{32}$, 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$\therefore a_n = \frac{1}{32} \cdot \sqrt{2}^{n-1} = 2^{-5} \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-11}{2}}$

$\therefore a_{101} = 2^{\frac{101-11}{2}} = 2^{45}$

33. 다음 그림과 같이 관람석이 전체 15 열로 이루어진 극장이 있다. 제 n 열의 좌석 수를 a_n 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_{n+1} = a_n + 1$ 을 만족한다. 제 1 열의 좌석 수가 30 일 때, 이 극장의 총 좌석 수는?



① 1100　② 555　③ 430　④ 330　⑤ 290

해설

$a_{n+1} - a_n = 1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 1 인 등차수열이다.

$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)\cdot 1$

$= n + 29(\because\ a_1 = 30)$

따라서, 총 좌석 수는

$\sum_{k=1}^{15}(k+29) = \frac{15\cdot 16}{2} + 29\cdot 15 = 555$

34. $a_4 = 1$, $a_8 = -11$ 이고, $\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - 1(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 을 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -17

해설

$\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - 1$ 에서

$\log_2 a_{n+1} = \log_2(a_n + a_{n+2}) - \log_2 2$

$= \log_2 \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a, 공차를 d 라 하면

$a_4 = a + 3d = 1$, $a_8 = a + 7d = -11$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a = 10$, $d = -3$

$\therefore\ a_{10} = 10 + 9 \cdot (-3) = -17$

35. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n$인 관계가 성립할 때, 이 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

① $\frac{1}{2}(3^{10}-1)$　② $3^{10}-1$　③ $\frac{3}{2}(3^{10}-1)$
④ $2(3^{10}-1)$　⑤ $\frac{5}{2}(3^{10}-1)$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$ 이므로 $r = 3$

$\therefore a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = \frac{3(3^{10}-1)}{3-1}$

$= \frac{3}{2}(3^{10}-1)$

36. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의 될 때, a_9의 값은?

① 2^{15} ② 2^{16} ③ $3 \cdot 2^{15}$

④ $3 \cdot 2^{16}$ ⑤ $3 \cdot 2^{17}$

해설

$a_1 = 4$

$a_2 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 4$

$a_3 = 3 \cdot (a_1 + a_2) = 3 \cdot 16 = 3 \cdot 4^2$

$a_4 = 3(a_1 + a_2 + a_3) = 3 \cdot 64 = 3 \cdot 4^3$

$\vdots$

$a_9 = 3 \cdot 4^8 = 3 \cdot 2^{16}$

37. 수열 $\{a_n\}$이 a_1, $a_2 = 3$이고,
$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$를 만족할 때, $a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은?

① 196 ② 198 ③ 200 ④ 202 ⑤ 204

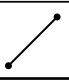
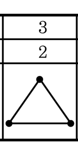
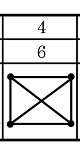
해설

$2\log a_{n+1} = \log a_n + \log a_{n+2}$에서
$\log a_{n+1}^2 = \log a_n a_{n+2}$
$\therefore\ a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 첫째항은 1, 공비는 $\frac{3}{1} = 3$ 이므로
$\therefore\ a_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$

$a_5 + \sum_{k=1}^{5} a_k = 3^4 + \frac{1 \cdot (3^5 - 1)}{3 - 1}$
$= 81 + 121 = 202$

38. 컴퓨터가 n 대 있는 게임방에서 컴퓨터 사이를 케이블선으로 다음 그림과 같은 방법으로 연결하려고 한다.

컴퓨터의 대수	2	3	4	$\cdots$
전화선의 수	1	2	6	$\cdots$
연결 방법				$\cdots$

이때, 11 대의 컴퓨터를 연결하는 데 필요한 케이블선의 개수는?

① 37 ② 45 ③ 55 ④ 66 ⑤ 78

해설

컴퓨터가 n 대일 때, 필요한 케이블선의 개수를 a_n 이라고 하면

$a_2 = 1$

$a_3 = a_2 + 2$

$a_4 = a_3 + 3$

$\vdots$

$a_{10} = a_9 + 9$

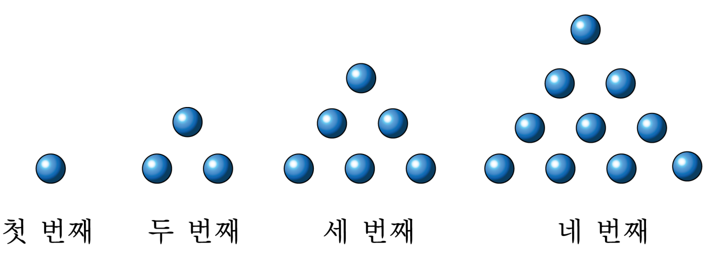
$a_{11} = a_{10} + 10$

위의 식들을 변끼리 더하면

$a_2+a_3+\cdots+a_{10}+a_{11} = a_2+a_3+\cdots+a_{10}+1+2+3+\cdots+9+10$

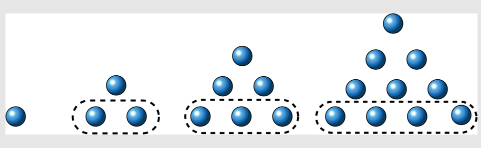
$\therefore\ a_{11} = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 = 55$

39. 바둑알로 다음 그림과 같은 모양을 만들 때, $(n+1)$ 번째 모양에는 n 번째 모양보다 바둑알이 몇 개 더 있는가?



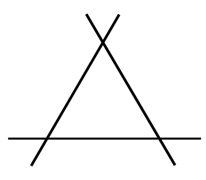
① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

해설



위의 그림에서 두 번째, 세 번째, 네 번째, $\cdots$ 모양에는 각각 바로 앞보다 바둑알이 2개, 3개, 4개, $\cdots$ 더 있으므로 $(n+1)$ 번째 모양에는 n 번째 모양보다 바둑알이 $(n+1)$ 개 더 있다. 즉, n 번째 모양을 이루는 바둑알의 개수가 a_n 개이면 $a_{n+1}-a_n=n+1$ 이다.

40. 평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않는 n개의 직선이 있다. n개의 직선으로 나누어진 평면의 개수를 a_n이라 할 때, 그림은 $a_3 = 7$을 나타낸다. a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하여라.

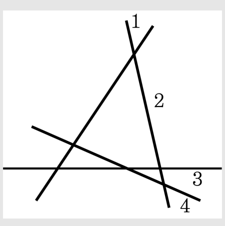


▶ 답 :

▷ 정답 : $a_{n+1} = a_n + n + 1$

해설

n개의 직선이 있는 상황에서 직선 하나가 늘어날 때 추가되는 평면의 개수를 구한다.



3개의 직선이 있는 상태에서 직선이 하나 추가되면 새로운 직선이 3개의 직선과 각각 만나 오른쪽 그림과 같이 4개의 평면이 새로 생긴다. 같은 방법으로 n개의 직선이 있는 상태에서 직선 하나를 추가하면 추가된 직선은 기존의 n개의 직선과 모두 만나 새로운 평면 $n+1$개를 만드므로 $a_{n+1} = a_n + (n+1)$이 성립한다.

41. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$(n은 자연수)으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$을 12로 나눈 나머지는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

주어진 조건에서
$a_1 = 1$
$a_2 = 2a_1 = 1 \times 2$
$a_3 = 3a_2 = 1 \times 2 \times 3$
$\vdots$
$a_n = na_{n-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$
그런데, $a_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$는 12의 배수이므로 a_5, a_6, $\cdots$, a_{2014}도 12의 배수이다.
따라서, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$을 12로 나눈 나머지는

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 \\ &= 1 + 2 + 6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

42. 자연수 전체의 집합 N을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 다음과 같은 조건을 만족한다.

㉠ $x \in N,\ y \in N$이면 $f(x+y) = f(x)f(y)$이다.
㉡ $f(1) = 3$

수열 $\{a_n\}$을 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$으로 정의할 때, a_{10}의 값은? (단, n은 자연수이다.)

① 3^{36} ② 3^{42} ③ 3^{45} ④ 3^{55} ⑤ 3^{66}

해설

㉠에서 $x = n,\ y = 1$로 놓으면

$f(n+1) = f(1)f(n) \quad \therefore\ f(n+1) = 3f(n)$

수열 $\{f(n)\}$은 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열이므로 $f(n) = 3^n$

이때, $a_{n+1} = 3^n a_n$이므로

$a_n = a_1 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdots 3^{n-1} = 3^{1+2+3+\cdots+(n-1)}$

$= 3^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\therefore\ a_{10} = 3^{\frac{10\times 9}{2}} = 3^{45}$

43. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$를 10으로 나눈 나머지는?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 2013$을
차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.

$$\begin{aligned} a_n &= n \times (n-1) \times \cdots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1 \\ &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n \end{aligned}$$

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,$
$a_4 = 24,\ a_5 = 120,\ a_6 = 6a_5,$
$a_7 = 7a_6,\ \cdots$
따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2014}$을 10으로
나눈 나머지는 3이다.

44. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

① $\dfrac{9}{4}$ ② $\dfrac{11}{4}$ ③ $\dfrac{13}{4}$ ④ $\dfrac{15}{4}$ ⑤ $\dfrac{17}{4}$

해설

$a_{n+1} = \dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}a_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}a_n \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ n$을 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2 = \dfrac{1\cdot 3}{2^2}a_1$

$a_3 = \dfrac{2\cdot 4}{3^2}a_2$

$a_4 = \dfrac{3\cdot 5}{4^2}a_3$

$\vdots$

$\times)\ a_n = \dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\ a_{n-1}$

$\therefore\ a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_n$

$= \dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\cdot a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdots a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{n+1}{2n}\cdot a_1$

$a_1 = 5$를 대입하면 $a_n = \dfrac{5(n+1)}{2n}$

$\therefore a_{10} = \dfrac{5\cdot 11}{2\cdot 10} = \dfrac{11}{4}$

45. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 10a_n + 81(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 이때, a_{10}의 각 자리의 수의 합은?

① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

해설

a_k의 각 자리의 수의 합을 b_k라 하면

$a_1 = 2 \quad \therefore\ b_1 = 2$

$a_2 = 10 \cdot 2 + 81 = 101 \quad \therefore\ b_2 = 1 + 0 + 1 = 2$

$a_3 = 10 \cdot 101 + 81 = 1091 \quad \therefore b_3 = b_2 + 9$

$a_4 = 10 \cdot 1091 + 81 = 10991 \quad \therefore\ b_4 = b_3 + 9 = b_2 + 9 \cdot 2$

$a_5 = 10 \cdot 10991 + 81 = 109991 \quad \therefore\ b_5 = b_4 + 9 = b_2 + 9 \cdot 3$

$\vdots$

$\therefore\ b_{10} = b_2 + 9 \cdot 8 = 2 + 72 = 74$

46. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_3의 값은?

① -8　② -9　③ -10　④ -11　⑤ -12

해설

$a_{n+1} = 6a_n - 3^{n+1}$에서

$a_{n+1} = 6a_n - 6 \cdot 3^n + 3 \cdot 3^n$

$a_{n+1} - 3^{n+1} = 6(a_n - 3^n)$

따라서 수열 $\{a_n - 3\}$은 첫째항이 $a_1 - 3 = 2 - 3 = -1$

공비가 6 인 등비수열이다.

$a_n - 3^n = -6^{n-1} \quad \therefore\ a_n = -6^{n-1} + 3^n$

$\therefore\ a_3 = -36 + 27 = -9$

47. 첫째항이 4인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} = 0$의 두 근 α_n, β_n이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$을 만족시킨다고 할 때, a_7의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 445

해설

이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} = 0$의 근과 계수의 관계에서
$\alpha_n + \beta_n = a_n, \ \alpha_n\beta_n = a_{n+1}$
이때, 두 근 α_n, β_n이 $(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$을 만족시키므로
$(\alpha_n - 2)(\beta_n - 2) = 7$에서 $\alpha_n\beta_n - 2(\alpha_n + \beta_n) + 4 = 7$
$a_{n+1} - 2a_n + 4 = 7$
즉, $a_{n+1} = 2a_n + 3$이고 $a_1 = 4$이므로
$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$에서
$a_n + 3 = 7 \cdot 2^{n-1} \quad \therefore a_n = 7 \cdot 2^{n-1} - 3$
$\therefore a_7 = 7 \cdot 2^6 - 3 = 445$

48. 20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$ 은 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 a_{20} = 16$
(나) $\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1} (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 18)$

20개의 양수 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$ 을 모두 곱한 값을 P라 할 때, $\log_4 P$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$\dfrac{\log a_n + \log a_{n+2}}{2} = \log a_{n+1}$ 이므로
$\log a_n a_{n+2} = 2\log a_{n+1} = \log a_{n+1}^2$
$\therefore\ a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$
따라서, $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{20}$ 은 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
이 때, 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면
$a_1 a_{20} = a \cdot ar^{19} = a^2 r^{19} = 16$
$P = a \cdot ar \cdot ar^2 \cdots ar^{19} = a^{20} r^{1+2+3+\cdots+19}$
$= a^{20} r^{190} = (a^2 r^{19})^{10} = 16^{10} = (4^2)^{10} = 4^{20}$
$\therefore\ \log_4 P = \log_4 4^{20} = 20$