

1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

- ① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \cdots \text{㉠} \\ x - y = 1 \cdots \text{㉡} \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$ 로 변형하여

㉠에 대입하면

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x+y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \text{ 에서}$$

$$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2, y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ 4x^2 - 9xy + y^2 = -14 \end{cases}$ 에서 $x + y$ 의 값을 a, b 라 할 때, $a - b$ 의 값은? (단, x, y 는 양수, $a > b$)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 && \dots \textcircled{1} \\ 4x^2 - 9xy + y^2 &= -14 && \dots \textcircled{2} \\ \textcircled{2} \text{ 식} + 2 \times \textcircled{1} \text{ 식에 대입하면} \\ 6x^2 - 11xy + 3y^2 &= 0 && (3x - y)(2x - 3y) = 0 \\ \therefore 3x &= y \text{ or } 2x = 3y \\ \textcircled{1}: 3x = y \text{를 } \textcircled{1} \text{식에 대입하면} \\ 7x^2 = 7x &= 1(x > 0), \quad y = 3 \\ \therefore x + y &= 4 \\ \textcircled{2}: 2x = 3y \text{를 } \textcircled{2} \text{식에 대입하면} \\ 7y^2 = 28, \quad y^2 = 4, \quad y = 2(y > 0), \quad x = 3 \\ \therefore x + y &= 5 \\ a > b \text{이므로 } a = 5, b = 4 \\ \therefore a - b &= 1 \end{aligned}$$

4. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$ 를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z 의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 8개 ⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변형 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$
 $xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$
여기에 $xy = z$ 를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$
(i) $z = 1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면,
 $xy = 1, x = y$
 $\therefore (x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$
(ii) $z = -1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면
 $xy = -1, x = -y$
 $\therefore (x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$
(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z) 는 모두 4개이다.

5. $|x+1|+|y-2|=0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 곱 xy 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$|x+1| \geq 0, |y-2| \geq 0$ 이므로 $x+1=0, y-2=0$

$\therefore x=-1, y=2$

따라서, 구하는 값은 $xy = -1 \cdot 2 = -2$

6. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

7. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$.

$$\begin{cases} x=y \\ y=\delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha + \beta + \gamma + \delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 x, y 가 양의 정수이므로

$2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha + \beta + \gamma + \delta = 15$$