

1. 실수 a, b 에 대하여 $a > b$ 일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $|a| > |b|$

㉡ $a^3 > b^3$

㉢ $a^2 > b^2$

㉣ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

- ㉠ $a > 0 > b$ 인 경우에는 b 의 절댓값이 더 클 수도 있다.
㉢ ㉠과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.
㉣ 역시 $a > 0 > b$ 인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

2. $-2 \leq x \leq 3$ 일 때, $3x - 1$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $-6 \leq 3x \leq 9$, $-7 \leq 3x - 1 \leq 8$
따라서, 최댓값은 8 이고 최솟값은 -7 이므로 두 값의 합은 1 이다.

3. $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, $\frac{20}{3-x}$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$-2 \leq x \leq 2$ 에서

$-2 \leq -x \leq 2$,

$1 \leq 3-x \leq 5$

$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3-x} \leq 1$

$\therefore 4 \leq \frac{20}{3-x} \leq 20$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 24

4. $-1 \leq x \leq 2$, $-5 \leq y \leq -2$ 일 때, $3x - 2y$ 의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16

② -8

③ 8

④ 16

⑤ 18

해설

$-1 \leq x \leq 2$ 이므로 $-3 \leq 3x \leq 6 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$

$-5 \leq y \leq -2$ 이므로 $4 \leq -2y \leq 10 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면 $1 \leq 3x - 2y \leq 16$ 따라서 최댓값과 최솟값의 곱은 16

5. $-6 < a \leq 12$, $3 < b \leq 4$ 일 때, ab 값의 범위를 구하면?

① $-3 < ab \leq 16$

② $-10 \leq ab \leq 9$

③ $-10 < ab < 9$

④ $-24 < ab \leq 48$

⑤ $-2 \leq ab \leq 4$

해설

$-6 < a \leq 12 \dots\dots ㉠$

$3 < b \leq 4 \dots\dots ㉡$

$㉠ \times ㉡$

$-6 \times 4 < ab \leq 12 \times 4$

6. 부등식 $3x + 2 \geq 8$ 을 풀면?

① $x \geq -2$

② $x \geq -1$

③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$

⑤ $x \geq 2$

해설

$$3x + 2 \geq 8, 3x \geq 6 \therefore x \geq 2$$

7. 부등식 $ax + 1 \geq 2x + 5$ 의 해가 $x \geq 2$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 4

⑤ 7

해설

$ax + 1 \geq 2x + 5$ 에서 $(a - 2)x \geq 4$ 의 부등식의 해가 $x \geq 2$ 이므로

$a - 2 > 0$

$x \geq \frac{4}{a - 2}$ 이므로 $\frac{4}{a - 2} = 2, a - 2 = 2$

$\therefore a = 4$

8. 부등식 $|x - 2| + |x + 3| \geq -2x + 9$ 의 해는?

① $x \geq 2$

② $-3 \leq x \leq 2$

③ $1 < x \leq 2$

④ $x < 2$

⑤ 해가 없다.

해설

(i) $x < -3$ 일 때,
 $-2x - 1 \geq -2x + 9, -1 \geq 9$
따라서 이 범위에서 해가 존재하지 않는다.
(ii) $-3 \leq x < 2$ 일 때,
 $5 \geq -2x + 9$
 $2x \geq 4, x \geq 2$ 따라서 이 범위에서 해가 없다.
(iii) $x \geq 2$ 일 때,
 $2x + 1 \geq -2x + 9$
 $4x \geq 8, x \geq 2$ 따라서 이 범위에서의 해는 $x \geq 2$ 이다.
세 범위의 해를 연립하면 결과는
 $\therefore x \geq 2$

9. 부등식 $|2x - 1| \geq 3$ 을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 1$ 또는 $x > 2$

⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설

$|2x - 1| \geq 3$ 에서

$2x - 1 \leq -3$ 또는 $2x - 1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

10. 다음 중에서 성립하지 않는 것은?

① $a^2 \geq 0$

② $a^2 + b^2 \geq 0$

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$

④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

해설

① $a^2 \geq 0$ (항상 성립)

② $a^2 + b^2 \geq 0$ (항상 성립)

③ $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (항상 성립)

④ $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$ (항상 성립)

⑤ $a > b \Leftrightarrow ab > 0$

(반례 : $a > 0, b < 0$ 이면 $a > b$ 이지만 $ab < 0$ 이다.)

11. 다음 중 옳지 않은 것을 고르면?

- ① $A > B > 0, C > D > 0$ 이면 $AC > BD$ 이다.
- ② $A > B, C > D$ 이면 $A + C > B + D$ 이다.
- ③ $A > B > 0$ 이면 $A^2 > B^2$ 이다.
- ④ $A > B$ 이면 $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$ 이다.
- ⑤ $A > 0 > B$ 이면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 이다.

해설

- ④ 만약 $B < 0 < A$ 인 경우라면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$ 가 되어 주어진 문장은 틀리다.

12. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠ $a > b, c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.
- ㉡ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.
- ㉢ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 이다.

- ① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

- ㉠ $a - b > 0, c - d > 0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.
- ㉡ $a > 0 > b$ 인 경우 b 의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.
- ㉢ 주어진 식에서 a, b 의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

13. x 에 대한 부등식 $x+2 \leq ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x+2 \leq ax+3$ 에서 $(1-a)x \leq 1$ 이 부등식의 해가 모든 실수이고
우변이 양수이므로 x 의 계수는 0이어야 한다.

$$1-a=0$$

$$\therefore a=1$$

14. x 에 대한 부등식 $ax + b \leq bx + a$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은? (단 a, b 는 실수)

- ① $a > b > 0$ 일 때, 해는 $x \geq 1$ 이다.
- ② $a < b < 0$ 일 때, 해는 없다.
- ③ $a = b$ 일 때, 해는 모든 실수이다.
- ④ $a = b$ 일 때, 해는 없다.
- ⑤ $a = b$ 일 때, 해는 $x > 1$ 이다.

해설

$ax + b \leq bx + a$ 에서 $(a - b)x \leq a - b$

(i) $a > b$ 일 때, $a - b > 0$ 이므로 $x \leq \frac{a - b}{a - b}$

$\therefore x \leq 1$

(ii) $a = b$ 일 때, $a - b = 0$ 이므로 $0 \cdot x \leq 0$

$\therefore$ 해가 무수히 많다

(iii) $a < b$ 일 때, $a - b < 0$ 이므로 $x \geq \frac{a - b}{a - b}$

$\therefore x \geq 1$

(i), (ii), (iii)에서 해는 모든 실수

15. 부등식 $ax - b^2 > bx + a^2 - 8$ 의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은?
(a, b 는 실수)

① $a = b$ 이고 $-1 < a < 1$

② $a = b$ 이고 $-2 < a < 2$

③ $a = b$ 이고 $-3 < a < 3$

④ $a = b$ 이고 $-4 < a < 4$

⑤ $a = b$ 이고 $-5 < a < 5$

해설

$ax - b^2 > bx + a^2 - 8$ 에서

$(a - b)x - b^2 - a^2 + 8 > 0$ 이 모든 x 에 대해서 성립해야 하므로

$$a = b$$

$$\therefore -2a^2 + 8 > 0 \quad 2a^2 < 8$$

$$\therefore a^2 < 4 \text{ 이므로 } -2 < a < 2$$

$$\text{즉 } a = b \text{ 이고 } -2 < a < 2$$

16. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m 의 값의 합은?

$m^2x - 1 > m(x - 1)$

- ① -2
- ② -1
- ③ 0
- ④ 1
- ⑤ 2

해설

$m^2x - 1 > m(x - 1)$ 에서
 $m^2x - 1 > mx - m$
 $\therefore (m^2 - m)x > 1 - m \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 의 해가 없어야 하므로
 $m^2 - m = 0, 1 - m \geq 0$
 $m^2 - m = 0$ 에서 $m(m - 1) = 0$
 $\therefore m = 0$ 또는 $1 \cdots \textcircled{2}$
 $1 - m \geq 0$ 에서 $m \leq 1 \cdots \textcircled{3}$
따라서 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에서 $m = 0$ 또는 $m = 1$

17. $ax + b > 0$ 의 해가 $x < 2$ 일 때, $(a + b)x < 5b$ 의 해는?

① $x > 5$

② $x > 10$

③ $x < 1$

④ $x < 5$

⑤ $x < 10$

해설

$ax + b > 0$ 에서 $ax > -b$

해가 $x < 2$ 이므로

$a < 0 \dots\dots ㉠$

$-\frac{b}{a} = 2 \dots\dots ㉡$

㉡을 정리하면 $b = -2a \dots\dots ㉢$

㉢에서 $b = -2a$ 를 $(a + b)x < 5b$ 에 대입하면

$(a - 2a)x < 5 \cdot (-2a), -ax < -10a$

㉠에서 $a < 0$ 이므로 $x < 10$

18. x 에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$ 의 해가 $x<1$ 일 때, x 에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$ 의 해는?

① $x<-10$

② $x<-5$

③ $x>-5$

④ $x<5$

⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$ 에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots㉠$

㉠의 해가 $x<1$ 이라면 $a+b<0\cdots㉡$

㉠이 양변을 $a+b$ 로 나누면 $x<\frac{-a+2b}{a+b}$ 이므로

$$\frac{-a+2b}{a+b}=1, \quad -a+2b=a+b$$

$$\therefore 2a=b\cdots㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0\therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$ 에 대입하면

$$(2a-3a)x+a+4a>0, \quad -ax>-5a \quad \therefore x>5$$

19. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$ 의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$

② $x^2-4x+3<0$

③ $x^2-6x+5<0$

④ $x^2-4x+3\leq 0$

⑤ $x^2-8x+15\leq 0$

해설

(i) $x < 1$ 일 때, $-x+1-x+3 < 6$

$x > -1 \therefore -1 < x < 1$

(ii) $1 \leq x < 3$ 일 때, $x-1-x+3 < 6$

$2 < 6 \therefore 1 \leq x < 3$

(iii) $x \geq 3$ 일 때, $x-1+x-3 < 6$

$x < 5 \therefore 3 \leq x < 5$

$\therefore -1 < x < 5$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-5) < 0, x^2-4x-5 < 0$

20. 부등식 $|2x - a| > 7$ 의 해가 $x < -1$ 또는 $x > b$ 일 때, 상수 a, b 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x - a| > 7$ 에서

$2x - a < -7$ 또는 $2x - a > 7$

$\therefore x < \frac{a-7}{2}$ 또는 $x > \frac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x < -1$ 또는 $x > b$ 이므로

$\frac{a-7}{2} = -1, \frac{a+7}{2} = b$

$\therefore a = 5, b = 6$

$\therefore a + b = 11$

21. $abc < 0$, $\frac{a-b}{c} > 0$ 인 세 실수 a, b, c 에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

- ① $c > 0$ 이면 $a > b$ 이다.
- ② $a > 0$ 이면 $c < 0$ 이다.
- ③ $a > b$ 이면 $b < 0$ 이다.
- ④ $a > b$ 이면 $a > 0$ 이다.
- ⑤ $a < b$ 이면 $ab > 0$ 이다.

해설

- ① $c > 0$ 이면, $\frac{a-b}{c} > 0$ 에서 $a-b > 0$ 즉, $a > b$
- ② $a > 0$ 이면, $b < 0$, $c > 0$ 일 때도 두 부등식이 성립하므로 $c < 0$ 라고 말할 수 없다.
- ③, ④ $a > b$ 이면, $\frac{a-b}{c} > 0$ 에서 $c > 0$ 이므로 $ab < 0$ 이다.
따라서, $a > b$, $ab < 0$ 에서 $a > 0$, $b < 0$ 이다.
- ⑤ $a < b$ 이면, $\frac{a-b}{c} > 0$ 에서 $c < 0$ 이다.
따라서, $ab > 0$

22. $(a+b)x + (2a-3b) < 0$ 의 해가 $x < -\frac{1}{3}$ 일 때, 부등식 $(a-3b)x + (b-2a) > 0$ 을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x < -3$

해설

$$(a+b)x + (2a-3b) < 0$$

$$(a+b)x < 3b-2a$$

$$\Rightarrow x < \frac{3b-2a}{a+b} = -\frac{1}{3} \quad (a+b > 0)$$

$$\Rightarrow a+b = -3(3b-2a)$$

$$\Rightarrow a = 2b, \quad a+b = 3b > 0 \rightarrow b > 0$$

$$(a-3b)x + (b-2a) > 0 \Leftrightarrow -bx - 3b > 0$$

$$bx < -3b$$

$$\therefore x < -3 \quad (\because b > 0)$$

23. x 에 대한 부등식 $ax + b < 0$ 의 해가 $x > -1$ 일 때, 부등식 $(a + b)x + 3a - b > 0$ 의 해를 구하면?

① $x > -1$

② $x < -1$

③ $x > -3$

④ $x < -3$

⑤ $x < 5$

해설

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b$$

해가 $x > -1$ 이므로 $a < 0$

$$x > -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow a = b$$

$$(a + b)x + 3a - b > 0$$

$$2ax + 2a > 0$$

$$2ax > -2a$$

$$x < -1 \quad (\because a < 0)$$

24. 부등식 $\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x\right| \leq 1$ 을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하면?

- ① 13개 ② 9개 ③ 6개 ④ 4개 ⑤ 2개

해설

$$-1 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x \leq 1$$

$$-6 \leq 3 - 2x \leq 6$$

$$-9 \leq -2x \leq 3$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$$

그런데 x 는 자연수 이므로 1, 2, 3, 4이다.

25. 부등식 $|x - k| \leq 3$ 을 만족하는 x 의 값 중에서 최댓값과 최솟값의 곱이 9일 때, 양수 k 의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $3\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$|x - k| \leq 3$ 에서 $-3 \leq x - k \leq 3$,
 $-3 + k \leq x \leq 3 + k$
따라서 x 의 최댓값은 $3 + k$,
최솟값은 $-3 + k$ 이므로
 $(-3 + k)(3 + k) = 9$
 $k^2 - 9 = 9$
 $k^2 = 18 \quad \therefore k = \pm 3\sqrt{2}$
 k 는 양수이므로 $3\sqrt{2}$

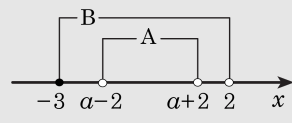
26. $|x - a| < 2$ 가 $-3 \leq x < 2$ 에 완전히 포함된다고 할 때, 정수 a 의 가 될 수 있는 수들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$|x - a| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - a < 2 \Leftrightarrow a - 2 < x < a + 2$$

다음 그림에서



$$-3 \leq a - 2, a + 2 \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 0$$

따라서 위의 부등식을 만족하는 정수 a 의 값은

-1, 0이고, 그 합은 -1이다.

27. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진

순서쌍 (x, y) 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + 2m$ 의 값을 구하면?

- ① -9
- ② -13
- ③ -18
- ④ -22
- ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} \times (-2) + \textcircled{㉡}$ 을 하면
 $-10 < -2x - 10y < -2 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉢} + \textcircled{㉡} = -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y 는 정수이므로 $y = 0, 1, 2, 3$
이것을 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 대입하여 적합한 x 의 값을 구하면
 $(x, y) = (-3, 1), (-6, 2), (-7, 2), (-11, 3)$
따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,
최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.
 $\therefore M = -2, m = -8 \therefore M + 2m = -18$

28. 부등식 $|2x - 2| < k + 2$ 를 만족하는 실수 x 값이 존재하기 위한 실수 k 의 값의 범위는?

① $k \leq -2$

② $k > -2$

③ $k \geq -2$

④ $k < 2$

⑤ $k \geq 2$

해설

i) $x \geq 1$ 일 때,

$$2x - 2 < k + 2, \quad 2x < k + 4 \quad \therefore x < \frac{1}{2}k + 2$$

$x \geq 1, x < \frac{1}{2}k + 2$ 를 만족하는 x 의 값이 존재하기 위해서는

$$\frac{1}{2}k + 2 > 1, \quad k > -2$$

ii) $x < 1$ 일 때,

$$-2x + 2 < k + 2, \quad -2x < k, \quad \therefore x > -\frac{1}{2}k$$

$x < 1, x > -\frac{1}{2}k$ 를 만족하는 x 의 값이 존재하기 위해서는

$$-\frac{1}{2}k < 1 \quad \therefore k > -2$$

i), ii)에 의하여 $k > -2$

29. 부등식 $|2x + 2| < a + 3$ 를 만족하는 실수 x 값이 존재하기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a \leq -4$

② $a > -4$

③ $a < -3$

④ $a > -3$

⑤ $a \leq -1$

해설

i) $x \geq -1$ 일 때,

$$2x + 2 < a + 3, 2x < a + 1 \quad \therefore x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

$x \geq -1$, $x < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$ 를 만족하는 x 의 값이 존재하기 위해서는

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} > -1, a > -3$$

ii) $x < -1$ 일 때,

$$-2x - 2 < a + 3, -2x < a + 5$$

$x < -1$, $x > -\frac{1}{2}a - \frac{5}{2}$ 를 만족하는 x 의 값이 존재하기 위해서는

$$-\frac{1}{2}a - \frac{5}{2} < -1 \quad \therefore a > -3$$

i), ii)에 의하여 $a > -3$

30. x 보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x 보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x) 로 나타낼 때, 방정식 $[x] + (x) = 7$ 을 만족하는 x 의 값을 모두 구하면?

- ① $\frac{7}{2}$
- ② $3 \leq x \leq 4$
- ③ $3 \leq x < 4$
- ④ $3 < x \leq 4$
- ⑤ $3 < x < 4$

해설

$$[x] = \begin{cases} k & (x \text{가 정수 } k \text{일 때}) \\ k & (k < x < k + 1 \text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k & (x \text{가 정수 } k \text{일 때}) \\ k + 1 & (k < x < k + 1 \text{일 때}) \end{cases}$$

따라서, $[x] + (x) = 7$ 이고
 $[x], (x)$ 는 정수이므로
 $[x] = 3, (x) = 4$ ($\because [x] \leq (x)$)
 $\therefore 3 < x < 4$