1. 다음 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a > b,\ c > d$ 이면 $a + c > b + d$ 이다.

㉡ $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$ 이다.

㉢ $a > b > 0$ 이면 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 이다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a - b > 0,\ c - d > 0$ 에서 양변을 더해 정리하면 주어진 식이 나온다.

㉡ $a > 0 > b$ 인 경우 b의 절댓값이 a 보다 크면 주어진 식은 성립하지 않는다.

㉢ 주어진 식에서 a, b의 부호가 모두 양수이므로 그 역수는 반대가 된다.

2. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

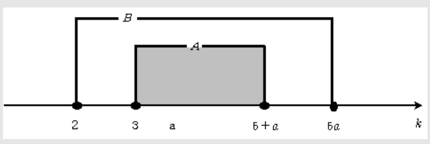
① 1 ② $\frac{8}{7}$ ③ $\frac{7}{6}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

3. 부등식 $ax-b^2 > bx+a^2-8$의 해가 모든 실수이기 위한 a 의 조건은? ($a,\ b$는 실수)

① $a=b$이고 $-1<a<1$

② $a=b$이고 $-2<a<2$

③ $a=b$이고 $-3<a<3$

④ $a=b$이고 $-4<a<4$

⑤ $a=b$이고 $-5<a<5$

해설

$ax-b^2 > bx+a^2-8$에서

$(a-b)x-b^2-a^2+8>0$이 모든 x에 대해서 성립해야 하므로

$a=b$

$\therefore -2a^2+8>0 \quad 2a^2<8$

$\therefore a^2<4$ 이므로 $-2<a<2$

즉 $a=b$ 이고 $-2<a<2$

4. $ax+b>0$ 의 해가 $x<2$ 일 때, $(a+b)x<5b$ 의 해는?

① $x>5$ ② $x>10$ ③ $x<1$

④ $x<5$ ⑤ $x<10$

해설

$ax+b>0$ 에서 $ax>-b$

해가 $x<2$ 이므로

$a<0$ ⋯⋯㉠

$-\frac{b}{a}=2$ ⋯⋯㉡

㉡을 정리하면 $b=-2a$ ⋯⋯㉢

㉢에서 $b=-2a$ 를 $(a+b)x<5b$ 에 대입하면

$(a-2a)x<5\cdot(-2a)$, $-ax<-10a$

㉠에서 $a<0$ 이므로 $x<10$

5. 부등식 $|x-1|+|x-3|<6$의 해와 같은 해를 갖는 이차부등식으로 옳은 것은?

① $x^2-4x-5<0$　　② $x^2-4x+3<0$
③ $x^2-6x+5<0$　　④ $x^2-4x+3\leqq 0$
⑤ $x^2-8x+15\leqq 0$

해설

(i) $x<1$일 때, $-x+1-x+3<6$
$x>-1$ $\therefore -1<x<1$
(ii) $1\le x<3$일 때, $x-1-x+3<6$
$2<6$ $\therefore 1\le x<3$
(iii) $x\ge 3$일 때, $x-1+x-3<6$
$x<5$ $\therefore 3\le x<5$
$\therefore -1<x<5$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-5)<0,\ x^2-4x-5<0$

6. 이차부등식 $x^2 - 6x + 9 \geq 0$의 해를 구하면?

① 해가 없다
② $x = 3$
③ $x \neq 3$인 모든실수
④ $-3 < x < 3$
⑤ 모든 실수

해설
$(x-3)^2 \geq 0$, (실수)$^2 \geq 0$이므로
$\therefore$ ⑤ 모든실수

7. 이차부등식 $(k-1)x^2-2(k-1)x-2>0$이 해를 가지지 않도록 실수 k의 값의 범위는?

① $-1<k<1$　② $-1\le k\le 1$　③ $-1\le k<1$
④ $-2<k<1$　⑤ $-2\le k\le 1$

해설

해를 가지지 않으므로 모든 실수 x에 대하여
$k-1<0$이고
$(k-1)x^2-2(k-1)x-2\ge 0$이어야 한다.
ⅰ) $k-1<0$에서 $k<1$
ⅱ) $(k-1)x^2-2(k-1)x-2=0$의 판별식을
D라고 하면
$\frac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1)\le 0,\ k^2-1\le 0$
$(k+1)(k-1)\le 0 \quad \therefore -1\le k\le 1$
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위를 구하면 $-1\le k<1$

8. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 의 해가 $2 < x < 3$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$2 < x < 3$ 가 해이므로
$(x-2)(x-3) < 0$
$x^2 - 5x + 6 < 0$, $a = -5, b = 6$
$\therefore\ a + b = 1$

9. 이차부등식 $x^2+2x+a<0$의 해가 $-4<x<2$일 때, a의 값을 구하여라.(단, a는 상수)

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

해가 $-4<x<2$ 이므로

$(x+4)(x-2)<0$

$x^2+2x-8=x^2+2x+a$

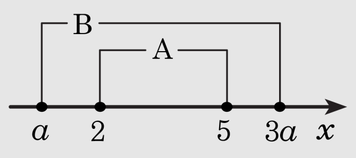
$\therefore a=-8$

10. 양의 실수 a에 대하여 $-x^2+7x-10 \geq 0$의 모든 해가 $x^2-4ax+3a^2 \leq 0$을 만족할 때, a의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3} \leq a \leq 2$　② $\frac{2}{3} \leq a \leq 2$　③ $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$
④ $\frac{5}{3} \leq a \leq 5$　⑤ $2 \leq a \leq 5$

해설

$-x^2+7x-10 \geq 0$
$x^2-7x+10 \leq 0$
$(x-2)(x-5) \leq 0$
$2 \leq x \leq 5$
$x^2-4ax+3a^2 \leq 0$
$(x-a)(x-3a) \leq 0$
$a \leq x \leq 3a(\because a > 0)$
㉠의 모든 해가 ㉡에 포함되므로



따라서 $a \leq 2,\ 3a \geq 5$이므로 $\frac{5}{3} \leq a \leq 2$

11. 다음 이차부등식 중 해가 존재하지 않는 것은?

① $2x^2-6x+1\le 0$　　② $x^2-2x-3<0$

③ $x^2-x+1>0$　　④ $x^2-6x+9>0$

⑤ $4x^2-4x+1<0$

해설

① $(x-\frac{3-\sqrt{7}}{2})(x-\frac{3+\sqrt{7}}{2})\le 0$

$\Rightarrow \frac{3-\sqrt{7}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{7}}{2}$

② $(x+1)(x-3)<0 \Rightarrow -1<x<3$

③ $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \Rightarrow x$ 는 모든 실수

④ $(x-3)^2>0 \Rightarrow x\ne 3$ 인 모든 실수

⑤ $(2x-1)^2<0 \Rightarrow$ 해는 없다

12. 연립부등식 $\begin{cases} x^2+3x-4<0 \\ (x-a)(x+2)>0 \end{cases}$ 의 해가 $-2<x<1$이 될 때, 실수 a의 최댓값은?

① 0 ② -2 ③ -4 ④ -6 ⑤ -8

해설

$x^2+3x-4<0$의 해가
$-4<x<1$이므로
연립부등식의 해가 $-2<x<1$가 되려면
$(x-a)(x+2)>0$의 해는
$x<a, x>-2$이고, $a \le -4$이다.

13. $2x-1>0$, $x^2-3x-4<0$를 동시에 만족하는 x 중에서 정수인 것의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

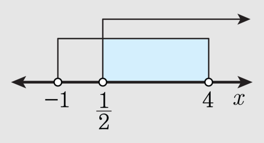
해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$㉠

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore -1<x<4\cdots\cdots$㉡



㉠, ㉡의 공통 부분은

$\therefore \frac{1}{2}<x<4$

따라서 x 중에서

정수인 것은 1, 2, 3의 3개다.

14. 두 부등식 $2x-1>0$, $(x+1)(x-a)<0$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $\frac{1}{2}<x<3$ 이 되도록 하는 정수 a의 값은? (단,$a>1$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$2x-1>0$

$\therefore x>\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ①

$(x+1)(x-a)<0$

$\therefore -1<x<a\cdots\cdots$ ②

즉 ①, ②의 공통 부분이 $\frac{1}{2}<x<3$ 이므로

$\therefore a=3$

15. 부등식 $x^2-2x-2<2|x-1|$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 0 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ -6

해설

$x^2-2x-2<2|x-1|$에서 구간을 나누어 해를 구한다.
(i) $x\geq 1$일 때, $x^2-2x-2<2(x-1)$
$x^2-4x<0,\ x(x-4)<0,\ 0<x<4$
공통범위는 $1\leq x<4$
(ii) $x<1$일 때, $x^2-2x-2<-2(x-1)$
$x^2-4<0,\ -2<x<2$
공통범위는 $-2<x<1$
i + ii : $-2<x<4 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$
$\therefore \beta-\alpha=4-(-2)=6$

16. 다음 중 부등식 $x^2-4ax+a^2-2a+1<0$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a 의 범위는? (단, a 는 실수)

① $-3 \le a \le 1$ ② $-1 \le a \le \frac{1}{3}$ ③ $-3 < a < 1$
④ $-1 < a < \frac{1}{3}$ ⑤ $-1 \le a \le 1$

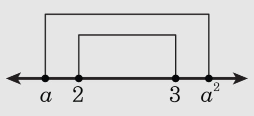
해설

$x^2-4ax+a^2-2a+1<0$ 의 해가
존재하지 않을 조건은
방정식 $x^2-4ax+a^2-2a+1=0$ 의
판별식 $D \le 0$ 이다.
$\therefore\ \frac{D}{4}=4a^2-(a^2-2a+1) \le 0$
$(3a-1)(a+1) \le 0$
$\therefore\ -1 \le a \le \frac{1}{3}$

17. 구간 $[2, 3]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$을 만족하는 실수 a의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a > 1$)

① 2　　② $2\sqrt{3}$　　③ 3　　④ $3\sqrt{2}$　　⑤ 5

해설



$[2, 3] \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3$

$x^2 - a(a+1)x + a^3 \leq 0$

$(x-a)(x-a^2) \leq 0$

$a < x < a^2 (\because\ a > 1)\quad a \leq 2, a^2 \geq 3$

$\therefore\ a$의 최댓값 : 2

a의 최솟값 : $\sqrt{3} \rightarrow \therefore\ 2\sqrt{3}$

18. 어부 김씨는 둘레 길이가 $28\,\mathrm{cm}$인 직사각형 모양의 양식장의 넓이를 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이 도도록 지으려고 한다. 이 때 양식장의 한 변의 길이를 최대 얼마로 해야 하는가?

① $5\,\mathrm{m}$ ② $6\,\mathrm{m}$ ③ $7\,\mathrm{m}$ ④ $8\,\mathrm{m}$ ⑤ $9\,\mathrm{m}$

해설

양식장의 가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$라고 하면
둘레의 길이는 $28\,\mathrm{m}$이므로
세로의 길이는 $(14-x)\,\mathrm{m}$이다.
양식장의 넓이가 $48\,\mathrm{m}^2$ 이상이므로
$x(14-x) \geq 48,\ 14x - x^2 - 48 \geq 0$
$x^2 - 14x + 48 \leq 0, (x-6)(x-8) \leq 0$
$\therefore 6 \leq x \leq 8$
따라서 한 변의 길이를 최대 $8\,\mathrm{m}$로 해야 한다.

19. 이차함수 $y = mx^2 + nx + mn + 2$ 의 그래프가 x 축보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1 < x < 3$ 일 때, $4mn$ 의 값은? (단, m, n 은 상수)

① -4　　② -2　　③ -1　　④ 2　　⑤ 4

해설

$mx^2 + nx + mn + 2 > 0 \cdots$ ㉠의 해가
$-1 < x < 3$ 이므로 $m < 0$ 이고
$m(x+1)(x-3) > 0$
$\therefore mx^2 - 2mx - 3m > 0$
이것이 ㉠과 일치하므로
$n = -2m,\ mn + 2 = -3m$
두 식을 연립하여 풀면 $-2m^2 + 2 = -3m$ 에서
$2m^2 - 3m - 2 = 0$, $(2m+1)(m-2) = 0$
$\therefore m = -\frac{1}{2}$ ($\because m < 0$)
따라서 $n = -2m = 1$ 이므로 $4mn = -2$

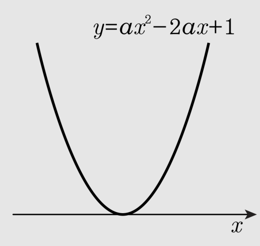
20. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

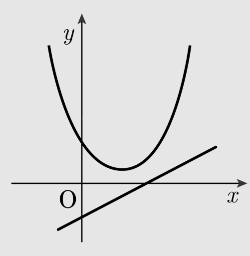
21. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$　　② $-1 < k < 0$　　③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$　　⑤ $k > 1$

해설

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면



위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서 판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$\therefore\ k < -1$

22. 이차방정식 $x^2 - 4x + k = 0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m < k \leq n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10　② 12　③ -15　④ -12　⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4 = 4 - k \geq 0$, $k \leq 4$
ⅱ) $f(3) > 0$, $k > 3$ 따라서,
ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3 < k \leq 4$
$m = 3$, $n = 4$ 이므로 $mn = 12$

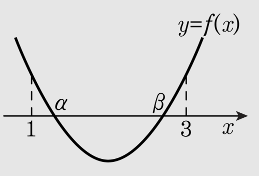
23. $1 < x < 3$ 에서 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - ax + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위가 $\alpha < a < \beta$ 일 때, $3\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

$f(x) = x^2 - ax + 4$ 라 하면
$1 < x < 3$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



(i) $x^2 - ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$D = a^2 - 16 > 0$ 에서 $(a+4)(a-4) > 0$
$\therefore\ a < -4$ 또는 $a > 4$

(ii) $f(1) = 5 - a > 0$ 에서 $a < 5$
$f(3) = 13 - 3a > 0$ 에서 $a < \frac{13}{3}$
$\therefore\ a < \frac{13}{3}$

(iii) $y = f(x)$ 의 그래프의 대칭축이
$x = \frac{a}{2}$ 이므로 $1 < \frac{a}{2} < 3$
$\therefore\ 2 < a < 6$

(i), (ii), (iii) 에서 a 의 값의 범위는 $4 < a < \frac{13}{3}$

따라서, $\alpha = 4$, $\beta = \frac{13}{3}$ 이므로 $3\alpha\beta = 52$

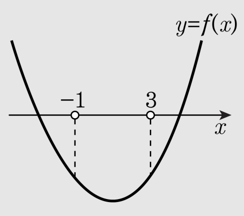
24. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0$, $f(3) \le 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \le 0$, $k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \le 0$, $9k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii) 에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

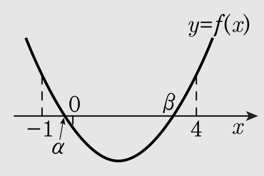
25. 이차방정식 $x^2-4kx+k^2-1=0$의 해를 α,β라 할 때, $-1<\alpha<0<\beta<4$를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는?

① $-1 \le k < 1$　　② $-1<k<1$　　③ $-1<k<5$

④ $0<k<1$　　⑤ $0<k<5$

해설

$f(x)=x^2-4kx+k^2-1$ 이라 하면
$f(x)=0$ 의 근 α,β 가
$-1<\alpha<0<\beta<4$ 를 만족시키므로
$y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(i) $f(-1)>0$ 에서 $k^2+4k>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>0 \cdots$ ㉠

(ii) $f(0)<0$ 에서 $k^2-1<0$

$\therefore -1<k<1 \cdots$ ㉡

(iii) $f(4)>0$ 에서 $k^2-16k+15>0$

$\therefore k<1$ 또는 $k>15 \cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통 범위를 구하면
$0<k<1$