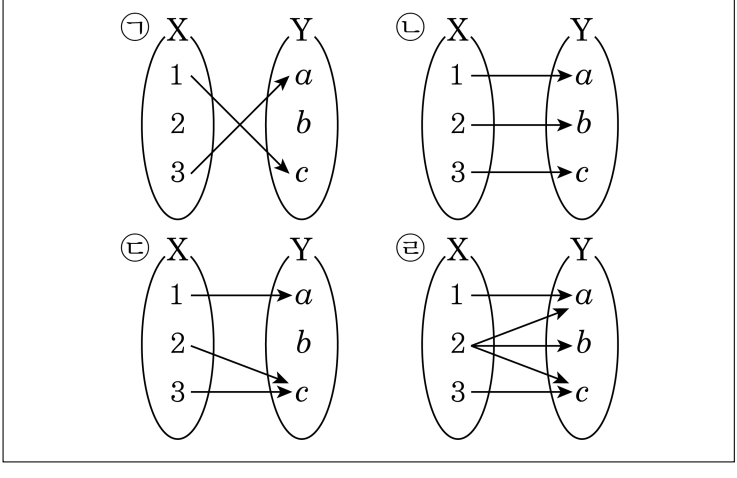


1. 다음 대응 관계 중 X 에서 Y 로의 함수인 것을 모두 고른 것은?



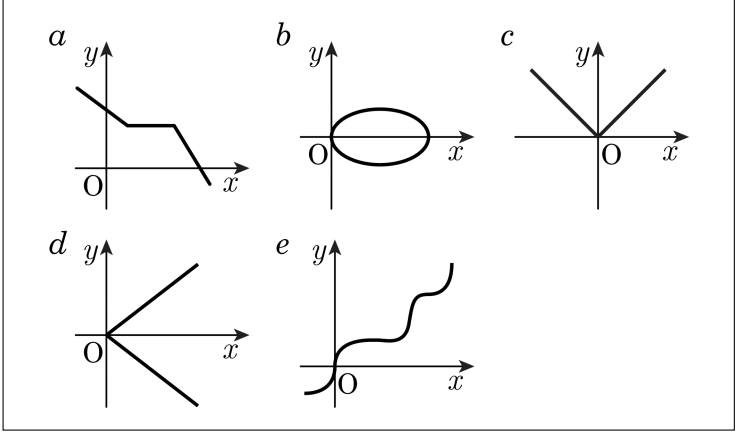
- ① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉡, ㉢

- ④ ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 없으므로 함수가 아니다.
㉡, ㉢ X 의 각 원소에 Y 의 원소가 하나씩만 대응하므로 함수이다.
㉣ X 의 원소 2에 대응하는 Y 의 원소가 a, b, c 의 3개이므로 함수가 아니다.

2. 다음 그래프 중 함수인 것은?

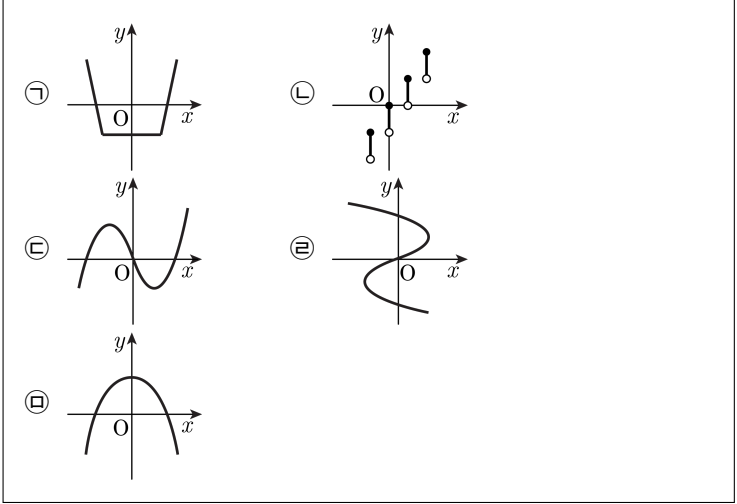


- ① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

$[a]$ 함수 $[b]$ 함수가 아니다. $[c]$ 함수 $[d]$ 함수가 아니다. $[e]$ 함수 따라서 $[a], [c], [e]$ 만이 함수이다.

3. 다음 그래프 중 함수인 것은?



- ① ㉠, ㉡, ㉢, ㉣
- ② ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
- ③ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
- ④ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤
- ⑤ ㉢, ㉣, ㉤, ㉤

해설

㉠ 함수
㉡ 함수가 아니다.
㉢ 함수
㉣ 함수가 아니다.
㉤ 함수
따라서 ㉠, ㉢, ㉤만이 함수이다.

해설

4. 1보다 큰 자연수 x 에 대하여 $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$ 로 정의 할 때, $f(25)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$$f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{\frac{x - 1}{x}} = x + 1$$

$$\therefore f(25) = 26$$

5. 실수 x, y 에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f 가 일대일대응일 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x 에 대하여 $y = 0$ 을
 $f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
 $f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
 $\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$ 이면
 $f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 1, \dots$ 이다.
위는 $f(x)$ 가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
 $f(x) = 1$ 은 부적당
 $\therefore f(0) = 0$

6. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 에 대하여 A 에서 A 에로의 함수 중 상수함수의 개수는?
- ① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

해설

상수함수의 개수는 공역의 원소의 개수와 같다.

X

0

1

2

Y

0

1

2

X

0

1

2

Y

0

1

2

X

0

1

2

Y

0

1

2

그러므로 구하는 상수함수의 개수는 3 개이다.

7. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X 에서 Y 로의 함수의 개수는
 $2 \times 2 \times 2 = 8$ (개)

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

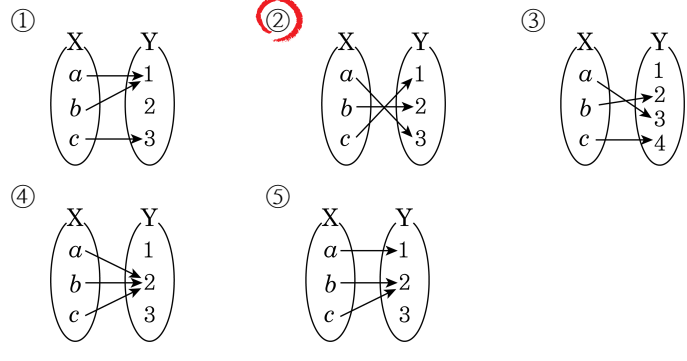
▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

9. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?



해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

10. 함수 $f(x) = ax + 3$ 과 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 같아지도록 하는 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -3 ② -1 ③ $-\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 3

해설

$y = ax + 3$ 으로 놓고 x, y 를 서로 바꾸면

$$x = ay + 3, y = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

$f(x) = f^{-1}(x)$ 에서

$$ax + 3 = \frac{1}{a}x - \frac{3}{a}$$

위의 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로

$$a = \frac{1}{a}, 3 = -\frac{3}{a}$$

$$\therefore a = -1$$

해설

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이면 $(f \circ f)(x)$ 이므로

$(f \circ f)(x) = I(x) = x$ 가 성립한다.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(ax + 3) = a(ax + 3) + 3 \\ = a^2x + 3a + 3$$

$$a^2x + 3a + 3 = x \text{에서 } a^2 = 1, 3a + 3 = 0$$

$$\therefore a = -1$$

11. 다음 중 옳지 않은 것은 무엇인가?

- ① $(f^{-1})^{-1} = f$ ② $g \circ f \neq f \circ g$
③ $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ④ $f \circ f^{-1} = I$
⑤ $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$

해설

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ f^{-1}$
즉, 옳지 않은 것은 ③이다.

12. 함수 f 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ 를 만족할 때, $f(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ 에서
 $x = 0, y = 0$ 을 대입하면
 $f(0+0) = f(0) + f(0), f(0) = 2f(0)$
 $\therefore f(0) = 0$

13. 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음과 같을 때, $(f \circ f)(x)$ 의 값은 얼마인가?

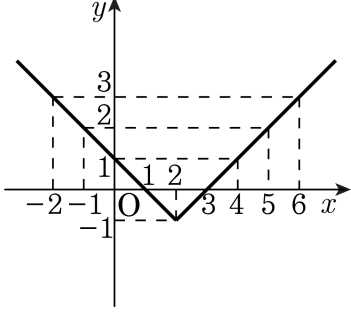
$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{가 유리수일 때}) \\ 3-x & (x \text{가 무리수일 때}) \end{cases}$$

- ① x ② $3-x$ ③ $x-3$ ④ 0 ⑤ 3

해설

- (i) x 가 유리수일 때, $f(x) = x$ 이므로,
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$
(ii) x 가 무리수일 때,
 $f(x) = 3-x$ 로 무리수이므로,
 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3 - f(x) = 3 - (3-x) = x$
(i), (ii) 에 의하여 $(f \circ f)(x) = x$

14. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
 $f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
 $X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
 $X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

15. 함수 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + ax + 3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$ 이 되는 실수 a 의 범위는? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

- ① $a \leq -3, a \geq 2$
- ② $-1 \leq a \leq 1$
- ③ $a \leq -2, a > 3$
- ④ $-2 \leq a \leq 2$
- ⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$g(x) = t$ 라 두면,
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = t^2 - t - 2 \geq 0$ 에서
 $t \leq -1, t \geq 2$ 에서
(i) $t \leq -1$
 $x^2 + ax + 3 \leq -1$
 $x^2 + ax + 4 \leq 0$ (부적절)
(ii) $t \geq 2$
 $x^2 + ax + 3 \geq 2$
 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 에서
 $D = a^2 - 4 \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq 2$

16. 실수 전체의 집합에서 $f : x \rightarrow ax(a \neq 1)$, $g : x \rightarrow x + b$ 로 정의된 함수 f, g 에 대하여 $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ 가 성립할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ax + ab$$

$$(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - b \cdots \textcircled{1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x, \quad g^{-1}(x) = x - b$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{1}{a}(x - b)$$

$$= \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } b = \frac{b}{a}(a \neq 1) \text{ 이므로 } b = 0$$

$$\therefore ab = 0$$

17. 함수 $f(x) = x + 3$ 에 대하여 $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의할 때, $f^{100}(100)$ 의 값은?

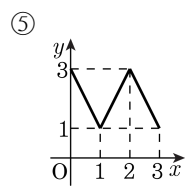
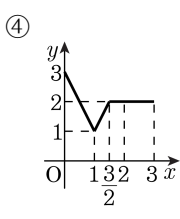
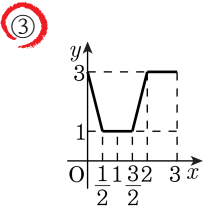
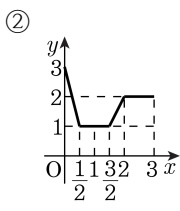
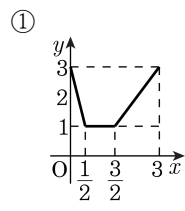
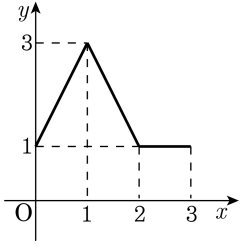
① 300 ② 400 ③ 500 ④ 600 ⑤ 700

해설

$f^1(x) = x + 3$
 $f^2(x) = f(f^1(x)) = f(x + 3) = x + 6$
 $f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x + 6) = x + 9$
 $\vdots$ 이므로
 $f^n(x) = x + 3n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로
추정할 수 있다.
따라서, $f^{100}(x) = x + 300$ 이므로
 $f^{100}(100) = 100 + 300 = 400$

18. 함수

$y = f(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y = (f \circ f)(x) \ (0 \leq x \leq 3)$ 의 그래프는 무엇인가?



해설

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프가 $x = 1$ 에 대하여 대칭이므로
 $y = (f \circ f)(x)$ 의 그래프도 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $x = 1$ 에 대하여 대칭이다.
 $y = (f \circ f)(x) = f(f(x))$ 에서
 $f(f(0)) = f(1) = 3$
 $f(f(1)) = f(3) = 1$
 $f(f(2)) = f(1) = 3$
 $f(f(3)) = f(1) = 3$
따라서, $y = (f \circ f)(x)$ 를 그래프로 나타내면 ③과 같다.

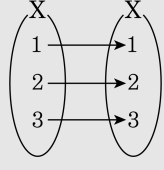
19. 집합 $X = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이고, $f \circ f = f$ 를 만족하는 함수는 모두 몇 개인가?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되는 경우는 6 가지이고 이 중에서 $f \circ f = f$

즉 $f = I$ (항등함수)를 만족하는 것은 하나 뿐이다.



20. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$ 가

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & (x \geq 1) \\ \frac{1}{x} + 1 & (0 < x < 1) \end{cases} \quad \text{일 때, } (f \circ f \circ f)(a) = 5 \text{ 를 만족하는}$$

상수 a 의 값을 구하면?

- ① -3 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$(f \circ f \circ f)(a) = 5$ 에서 $f(f(f(a))) = 5$ 이므로

$f(f(a)) = f^{-1}(5) = k_1$ 이라 하면 $f(k_1) = 5$

$5 > 1$ 이므로 $0 < k_1 < 1$, $\frac{1}{k_1} + 1 = 5$

$$\therefore k_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(f(a)) = \frac{1}{4}$$

$$f(a) = f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = k_2 \text{라 하면 } f(k_2) = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < 1 \text{ 이므로 } k_2 \geq 1, \frac{1}{k_2+1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k_2 = 3$$

$f(a) = 3$ 에서 $3 \geq 1$ 이므로 $0 < a < 1$

$$\therefore \frac{1}{a} + 1 = 3, a = \frac{1}{2}$$