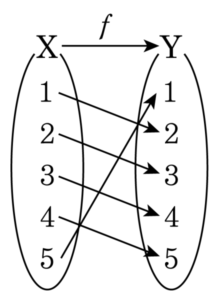
1. $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |2x-3|$으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$는 함수 f의 치역)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f(x) = |2x-3|$에서
$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5,\ f(5) = 7$ 이므로
$f(X) = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$
$\therefore\ 2 \notin f(X)$

2. 다음 그림과 같이 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$이고, 함수 $f : X \to X$ 에 대하여 $(f \circ f)(a) = 3$ 이 되는 a의 값은?



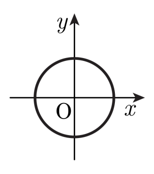
① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

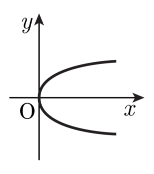
해설

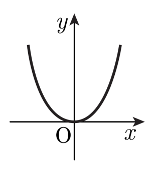
$f(f(a)) = 3$ 이므로 $f(a) = 2$

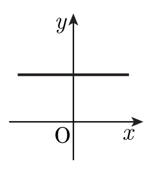
$\therefore\ a = 1$

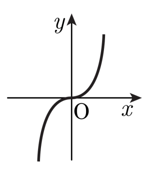
3. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

4. 일차함수 $y = px + q$ 의 역함수가 $y = -5x + 7$ 일 때, 상수 p, q 의 합 $p + q$ 는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ 4 ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 8

해설

$y = -5x + 7$ 의 역함수를 구하면

$x = -5y + 7,\ y = -\frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$

$p = -\frac{1}{5},\ q = \frac{7}{5}$

$\therefore p + q = \frac{6}{5}$

5. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
㉢ 선분과 그 길이의 대응
㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

① ㉠, ㉡, ㉢　　② ㉠, ㉡, ㉤　　③ ㉠, ㉢, ㉣
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉣, ㉤

해설

㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r는 오직 하나의 넓이 πr^2에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서 $b^2 - 4ac < 0$이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2 - 4ac > 0$이면 두 개의 대응을 가지므로 (서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
㉤ 특정한 실수 a를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, $\cdots$ 등 무수히 많다. 즉, 실수 a에 a를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다.
따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

6. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

7. 두 함수 $f(x) = 3x - 5$, $g(x) = x^2 + 1$에 대하여 $(g \circ f)(2)$의 값을 구하면?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$\therefore\ (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2$

8. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot1+1)=f(3)=3\cdot1+2=5$

9. $f(x) = \begin{cases} 4x^2+1 & (x \geq 0) \\ 2x+1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x-7$ 일때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
$g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.
$(g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3))$
$= f^{-1}(2)$
$(f^{-1})(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$
그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로
이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.
따라서, $a \geq 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
$4a^2 = 1$
$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \geq 0)$
$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$

10. $f(x) = 2x - 3$ 이고 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 2x$ 를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은 얼마인가?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 2x \Leftrightarrow (g \circ f)(2x) = x$
$\Leftrightarrow g(f(2x)) = x$
$f(2x) = 2 \bullet 2x - 3 = 4x - 3$
$\therefore g(f(2x)) = g(4x - 3) = x$
$4x - 3 = 1$ 에서 $x = 1$ 이므로
$g(4x - 3) = x$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면 $g(1) = 1$

11. $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$, $g(x)=x+c$라 할 때, $(f\circ g)(x)=2x-3$, $f^{-1}(3)=-2$가 성립한다. 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=7$

▷ 정답 : $c=-5$

해설

$(f\circ g)(x)=f(x+c)=a(x+c)+b=ax+ac+b$

$\therefore\ a=2\cdots$ ㉠

$ac+b=-3\cdots$ ㉡

$f^{-1}(3)=-2$이므로, $f(-2)=3$

$\therefore\ -2a+b=3\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$\therefore a=2,\ b=7,\ c=-5$

12. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore\ x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2,\ 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

13. $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$라고 할 때, X 에서 Y 로 대응되는 함수의 개수와 X 에서 Y 로 대응되는 일대일 함수의 개수를 더한 값은?

① 87 ② 88 ③ 105 ④ 144 ⑤ 267

해설

함수 a, b, c 모두 선택 가능한 개수는 4 가지 이다.
그리고 각각을 선택하는 사건은 동시에 일어나는 것이다.
$\therefore 4 \times 4 \times 4 = 64$ 가지
일대일 함수 : $a \neq b$ 이면 $f(a) \neq f(b)$ 이므로
a 가 선택 가능한 개수 : 4
b 가 선택 가능한 개수 : 3
c 가 선택 가능한 개수 : 2
이 경우 역시 각각의 사건 모두 동시에 일어난다.
$\therefore\ 4 \times 3 \times 2 = 24$ 가지
$\therefore\ 64 + 24 = 88$

14. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$
즉 $2kx + k^2 - k = 0$
모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

15. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답:

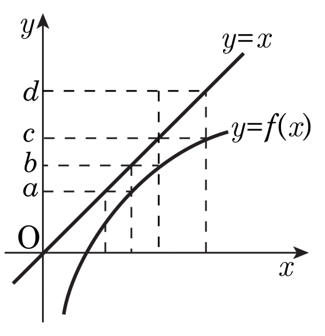
▷ 정답: 12

해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1)+1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1)+2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1)+3 = x+4 \\ &\cdots \\ f^n(x) &= x+n \end{aligned}$$

$\therefore\ f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$

16. 아래의 그림은 두 함수 $y = f(x)$, $y = x$ 의 그래프이다. $f^{-1}(b)$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : c

해설

$f^{-1}(b) = k$ 라 하면 $f(k) = b$
$f(c) = b$ 이므로 $k = c$
따라서 $f^{-1}(b) = c$