1. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

2. 다항식 $2x^2+5ax-a^2$을 다항식 $P(x)$로 나눈 몫이 $x+3a$, 나머지가 $2a^2$일 때, 다항식 $(x+a)P(x)$를 나타낸 것은?

① $x^2+2ax-2a^2$
② x^2-a^2
③ $2x^2+3ax+a^2$
④ $2x^2-3ax-a^2$
⑤ $2x^2+ax-a^2$

해설

$2x^2+5ax-a^2=P(x)(x+3a)+2a^2$이므로
$P(x)(x+3a)=2x^2+5ax-3a^2$
따라서, 다항식 $P(x)$는 $2x^2+5ax-3a^2$을 $x+3a$로 나눈 몫이므로
$P(x)=2x-a$

$$\therefore\ (x+a)P(x)=(x+a)(2x-a)$$
$$=2x^2+ax-a^2$$

3. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 겉넓이는 52이고, 모서리의 길이의 합은 36이다. 이 상자의 대각선의 길이는?

① 5　② $\sqrt{29}$　③ $\sqrt{33}$　④ 6　⑤ $\sqrt{42}$

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c라 하면

$2(ab+bc+ca)=52$

$4(a+b+c)=36 \;\rightarrow\; a+b+c=9$

(직육면체 대각선의 길이)

$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{(a+b+c+)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{81-52}=\sqrt{29}$

4. 두 다항식 $f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$를 $x+2$로 나눈 나머지가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a = -2$

해설

$f(x) = x^2+3x+a$, $g(x) = x^3+ax$에서
$f(-2) = g(-2)$이므로
$4-6+a = -8-2a$
$\therefore\ a = -2$

5. 다항식 $x^4 + x^2y^2 + 25y^4$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + mxy + 5y^2)(x^2 + nxy + 5y^2)$ 가 되었다. 이 때 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값을 구하면?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= x^4 + 10x^2y^2 + 25y^4 - 9x^2y^2 \\
&= \left(x^2 + 5y^2\right)^2 - (3xy)^2 \\
&= \left(x^2 + 5y^2 - 3xy\right)\left(x^2 + 5y^2 + 3xy\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ m + n = 0$

6. $\dfrac{2004^3-2003^3-1}{2003\times2004}$ 의 값을 구하면?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$2003=x$ 라 두면 $2004=x+1$

$$(\text{준 식})=\frac{(x+1)^3-x^3-1}{x(x+1)}$$

$$=\frac{3x(x+1)}{x(x+1)}=3$$

7. 두 다항식 A, B에 대하여 $A \otimes B$를 $A \otimes B = \dfrac{B}{B-A}$ 라 할 때, $(x \otimes x^2) + (x^2 - x) \otimes (x-1)$을 간단히 하면? (단, $x \neq 0$, $x \neq 1$인 실수)

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$(x \otimes x^2) = \frac{x^2}{x^2 - x} = \frac{x^2}{x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

$$\begin{aligned}(x^2 - x) \otimes (x-1) &= \frac{x-1}{(x-1)-(x^2-x)} \\ &= \frac{x-1}{x-1-x^2+x} \\ &= \frac{(x-1)}{-(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x-1)}{-(x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{x-1}\end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{(x-1)} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

8. 실수 k 에 대하여 복소수 $z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 의 값이 순허수가 될 때, $z \cdot \bar{z}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$z = 3(k+i) - k(1-i)^2$ 를 정리하면

$z = 3k + 3i + 2ki = 3k + (3+2k)i$

이것이 순허수이려면 $3k = 0,\ 3 + 2k \neq 0$

$k = 0$ 이므로 $z = 3i,\ \bar{z} = -3i$

$\therefore z \cdot \bar{z} = 3i \cdot -3i = 9$

9. 실수 x, y 대하여 $\frac{x}{1+i}+\frac{y}{1-i}=2-i$가 성립할 때, $2x+y$ 의 값은?

① 8 ② 7 ③ 5 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{5}$

해설

$\frac{(1-i)x+(1+i)y}{(1+i)(1-i)}=2-i$

$\frac{(x+y)-(x-y)i}{2}=2-i$

$(x+y)-(x-y)i=4-2i$

복소수의 상등에 의해서

$x+y=4 \cdots$ ㉠, $x-y=2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $x=3,\ y=1 \quad \therefore\ 2x+y=7$

10. 복소수 $\alpha = 2 - i$, $\beta = -1 + 2i$ 일 때, $\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$ 의 값은?
(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 10 ⑤ 20

해설

$\alpha\overline{\alpha} + \overline{\alpha}\beta + \alpha\overline{\beta} + \beta\overline{\beta}$
$= \overline{\alpha}(\alpha + \beta) + \overline{\beta}(\alpha + \beta)$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$
$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$
$= (1 + i)(1 - i)$
$= 2$

11. $x^2-2x+3=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라고 할 때, $(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$x^2-2x+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$

$(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)$

$=\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+4\alpha\beta$

$=(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta$

$=9-6\cdot 2+12=9$

12. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$

항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$

$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$

$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$

m에 관해 식을 정리하면

$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$

$4a+4b=0, \quad a^2-2ab+b^2=0$

$\therefore a+b=0$

13. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면
$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$
$(a - b)p + a - b = 0$
$(a - b)(p + 1) = 0$
$a \neq b$ 이므로 $p = -1$
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로
교점의 y 좌표는 0 이다.
$\therefore 1 + a + b = 0$
$\therefore a + b = -1$

14. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

15. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3 = 1$,
$x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$
$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$
$= w^2 + w + 1$
$= 0$

16. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle\mathrm{ABC}$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 정삼각형이다.

17. $a+b=4$, $a^2+b^2=10$ 일 때, a^5+b^5 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 244

해설

$a+b=4$, $a^2+b^2=10$

$ab=\frac{1}{2}\{(a+b)^2-(a^2+b^2)\}=3$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=28$

$$\begin{aligned}\therefore\ a^5+b^5 &= (a^3+b^3)(a^2+b^2)-a^2b^2(a+b)\\ &= 28\times10-9\times4\\ &= 244\end{aligned}$$

18. 모든 실수 x에 대하여 $x^{10}+1=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$이 성립할 때, $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 513

해설

양변에 $x=0$을 대입하면

$1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{10}\cdots$①

양변에 $x=2$을 대입하면

$2^{10}+1=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}\cdots$②

①+②에 의해

$2^{10}+2=2\left(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{10}\right)$

$\therefore\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)=2^9+1=513$

19. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0,\ g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$　② $x-1$　③ $-x+1$
④ $-x-1$　⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$
나머지를 $ax+b$라 하면
$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$

$$\begin{aligned} g(\sqrt{2}+1) &= f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b \\ &= a(\sqrt{2}+1)+b \ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0) \end{aligned}$$

$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$
$\therefore\ a=1,\ b=1$
따라서 구하는 나머지는 $x+1$

20. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

21. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $x=a-2b+3c$ $,y=b-2c+3a,\ z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

22. $\dfrac{\bar{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\bar{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2의 값을 구하면?

① ± 1 ② $\pm 2i$ ③ ± 2 ④ $\pm i$ ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a+bi \\ z = a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\bar{z}}=i$$

$$\frac{\bar{z}^2+\bar{z}+z^2-z}{z\bar{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=i$$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$$a^2=b^2,\ \frac{-2b}{a^2+b^2}=+1$$

$$\therefore\ a=\pm 1, b=-1$$

$$z=\pm 1-i\ ,\ z^2=\pm 2i$$

23. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$　② $\frac{49}{8}$　③ 49　④ 8　⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$를 x에 대해 정리하면
$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$
$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$
$4 - 200 + 32a = 0$
$\therefore\ a = \frac{49}{8}$

24. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2-5x+3=0$　　② $x^2+5x-3=0$

③ $x^2-5x+1=0$　　④ $x^2+6x-1=0$

⑤ $x^2-6x+1=0$

해설

$\begin{cases} \alpha-\beta=2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4 \quad \cdots ㉢$

㉡ − ㉢에서

$\alpha\beta=1 \quad \cdots ㉣$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha^2\beta^2=1$

$\therefore\ \alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$

25. 이차항의 계수가 1 인 이차방정식에서 상수항을 1 만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3 만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
$\therefore\ b^2 = 4c + 4 \cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$ 가 된다.
$\therefore\ \alpha + 2\alpha = -b \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12,\ c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
$\therefore\ x = -5$ 또는 $-7,\quad x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

26. $1 \le x \le a$ 에서 함수 $y = x^2 - 2x - 3a$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 4 일 때, a 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$y = x^2 - 2x - 3a = (x-1)^2 - 3a - 1$

최솟값 : $x = 1$ 일 때 $\Rightarrow -3a - 1$

최댓값 : $x = a$ 일 때 $\Rightarrow a^2 - 5a$

$\therefore a^2 - 5a - (-3a - 1) = 4$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$a = 3 \ (\because a > 1)$

27. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

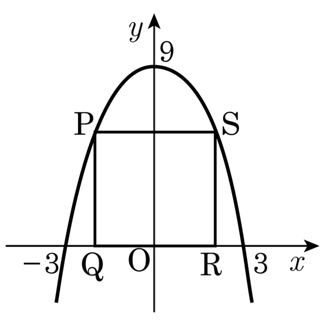
x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.

28. 다음의 그림과 같이 이차함수 $y = f(x)$ 에 내접하는 직사각형 PQRS 가 있다. PQRS 의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

먼저 이차함수의 식을 구하면
$(0, 9)$ 를 지나므로 $y = mx^2 + 9$,
$(3, 0)$ 을 지나므로 $y = -x^2 + 9$
$\mathrm{R}(a, 0)$ 이라 하면 (단, $0 < a < 3$), $\mathrm{S}(a, -a^2 + 9)$
직사각형의 가로는 $2a$, 세로는 $-a^2 + 9$
둘레는 $2\{2a + (-a^2 + 9)\} = -2(a - 1)^2 + 20$
따라서 둘레의 최댓값은 20

29. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서
$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$
$\therefore\ x+1=0$ 또는
$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$
(i) $x+1=0$에서 $x=-1$
(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$

$$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이 때, $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면
$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$
①$x+\frac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

②$x+\frac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의
두 허근이 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로
두 허근 α, β의 합은
$\alpha+\beta=1$이다.

30. 다음의 x, y에 대한 연립방정식의 해가 무수히 많을 때, $x+y$의 값을 구하라.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx+cy+a=0 \end{cases}$$

(단, a, b, c는 0이 아닌 실수이다.)

▶ 답:

▷ 정답: $x+y=-1$

해설

$$\begin{cases} ax+by+c=0 & \cdots ㉠ \\ bx+cy+a=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

해가 무수히 많으므로

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$가 성립한다.

따라서, $a=bk$, $b=ck$, $c=ak$에서

$abc=abck^3$, $abc \neq 0$이므로

$k^3=1$이다.

즉, $k=1$, $a=c$이므로

㉠, ㉡의 식은 $a(x+y+1)=0$

$a \neq 0$이므로

$x+y+1=0$에서 $x+y=-1$

31. 영어참고서 A권(두께가 같음), 수학참고서 H권(두께는 같고, 영어참고서보다 두꺼움)으로 가득 채워지는 어느 책꽂이가 있다. 또 이 책꽂이는 영어참고서 S권, 수학참고서 M권으로 가득 채워질 수 있다. 또, 영어참고서 E권 만으로도 가득 채워진다고 한다. A, H, S, M, E는 모두 양의 정수라고 할 때, E를 나타내는 것은?

① $\dfrac{AM+SH}{M+H}$　② $\dfrac{AM^2+SH^2}{M^2+H^2}$　③ $\dfrac{AH-SM}{M-H}$

④ $\dfrac{AM-SH}{M-H}$　⑤ $\dfrac{AM^2-SH^2}{M^2-H^2}$

해설

책꽂이의 길이를 l, 영어참고서의 두께를 x, 수학참고서의 두께를 y라 하자.

$Ax+Hy=l$ ······①

$Sx+My=l$ ······②

$Ex=l$ ······③

$M\times$① $-H\times$② 에서

$(AM-SH)x=(M-H)l$

$\therefore\ E=\dfrac{l}{x}=\dfrac{AM-SH}{M-H}$

32. 두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+x+3k=0$이 공통인 실근 α를 가질 때, $\alpha-k$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

공통근이 α이므로

$\alpha^2+k\alpha+3=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2+\alpha+3k=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠ − ㉡에서 $(k-1)\alpha-3(k-1)=0$,

$(k-1)(\alpha-3)=0$

(i) $k=1$인 경우 두 이차방정식이 $x^2+x+3=0$으로 일치하여 공통근은 갖지만 실근이 아니므로 부적합하다.

(ii) $\alpha=3$인 경우 $9+3k+3=0$ $\therefore$ $k=-4$

$\therefore$ $\alpha-k=7$

33. 다음 등식을 만족시키는 0이 아닌 실수의 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$$

① 0 개

② 1 개

③ 2 개

④ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 1 개씩 있다.

⑤ 각각의 $b(\neq 0)$ 에 대하여 2 개씩 있다.

해설

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a+b}$, $(a+b)^2=ab$, $a^2+ab+b^2=0$

$\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2=0$ 실수로서 이 등식을 만족하는 경우는 $a=0,\ b=0$뿐이다.

따라서 0 이 아닌 실수의 순서쌍 $(a,\ b)$ 는 없다.

34. $a^2+b^2+c^2=12$, $a+b+c=4$ 이 성립할 때, c 의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단, $a,\ b,\ c$ 는 실수)

① $-\frac{8}{3}$　② $-\frac{4}{3}$　③ $\frac{4}{3}$　④ $\frac{8}{3}$　⑤ 4

해설

$a+b+c=4$

$\Rightarrow \quad b=4-(a+c)$

$a^2+b^2+c^2=12$

$\Rightarrow \quad a^2+c^2+\{4-(a+c)\}^2=12$

a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2+(c-4)a+c^2-4c+2=0$

a,b,c 는 실수이므로 판별식이 0 보다 크거나 같다.

$D=(c-4)^2-4(c^2-4c+2)\geq 0$

$\Rightarrow \quad 3c^2-8c-8\leq 0$

$\Rightarrow \quad \frac{4-2\sqrt{10}}{3}\leq c\leq \frac{4+2\sqrt{10}}{3}$

$\therefore$ (최댓값 $\times$ 최솟값)

$=\left(\frac{4-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(\frac{4+2\sqrt{10}}{3}\right)$

$=-\frac{8}{3}$

35. $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta = m + 1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ ($\alpha,\ \beta$는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m = -1,\ 7$

36. $x-1$로 나누면 나머지가 1이고, $x+1$로 나누면 나머지가 -1인 다항식 $f(x)$가 있다. $f(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. $f(0)=0$일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $Q(0)=0$이다. ㉡ $f(x)$는 이차식이 될 수 없다. ㉢ $f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=x^3$이다

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$f(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$f(1)=a+b=1,\quad f(-1)=-a+b=-1$
$\therefore\ a=1,\ b=0$
$\therefore\ f(x)=(x^2-1)Q(x)+x$
㉠ $f(0)=-Q(0)=0$　$\therefore$참
㉡ $f(x)$가 이차식이기 위해서는 $Q(x)$가 0이 아닌 상수이어야 하는데 $Q(0)=0$이므로 그런 경우는 없다. $\therefore$참
㉢ $Q(0)=0$이므로 $Q(x)=ax\ (a\neq 0)$
$\therefore\ f(x)=ax(x^2-1)+x\ (a\neq 0)$　$\therefore$거짓

37. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

① 0
② 1
③ r_1
④ $r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n$
⑤ $r_1r_2\cdots\cdots r_n$

해설

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= (x-1)f_2(x)+r_1 \\
&= (x-1)\{(x-1)f_3(x)+r_2\}+r_1 \\
&= (x-1)^2 f_3(x)+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^2\{(x-1)f_4(x)+r_3\}+r_2(x-1)+r_1 \\
&= (x-1)^3 f_4(x)+r_3(x-1)^2+r_2(x-1)+r_1 \\
&\qquad\vdots \\
&= (x-1)^n f_{n+1}(x)+r_n(x-1)^{n-1}+r_{n-1}(x-1)^{n-2}+\cdots\cdots \\
&\qquad\qquad +r_2(x-1)+r_1
\end{aligned}
$$

$R(x)=r_n(x-1)^{n-1}+\cdots\cdots+r_2(x-1)+r_1$

$\therefore\quad R(2)=r_n+r_{n-1}+\cdots\cdots+r_2+r_1$

38. a, b 가 양의 정수이고, 다항식 $f(x) = x^4 + ax^3 + x^2 + bx - 2$ 이다. $f(x)$ 가 일차식 $x - \alpha$ 를 인수로 갖게 하는 정수 α 의 값과 $a, b(a > b)$ 의 값에 대하여 $\alpha^2 + a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

α가 될 수 있는 상수항 -2의 약수인 ±1, ±2을 준식에 차례로 대입해 보면

$f(1) = 1 + a + 1 + b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(-1) = 1 - a + 1 - b - 2 = 0,\ a + b = 0$

$f(2) = 16 + 8a + 4 + 2b - 2 = 0,\ 4a + b = -9$

$f(-2) = 16 - 8a + 4 - 2b - 2 = 0,\ 4a + b = 9$

그런데, 위의 세 식은 a, b가 양의 정수라는 조건을 충족시키지 못한다.

$\therefore\ \alpha = -2$ 이고 $4a + b = 9$

$\alpha = -2,\ a = 2,\ b = 1\ (\because\ a > b\ )$

$\therefore\ \alpha^2 + a^2 + b^2 = 9$

39. 모든 복소수 z 에 대하여 다음 중 실수인 것을 <u>모두</u> 고르면 ? (단 $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

㉠ $(z+1)^2$
㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z$
㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)+\left((\bar{z})^2+\bar{z}+1\right)(z+1)$

① ㉠　　② ㉡　　③ ㉢
④ ㉠, ㉡　　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ (반례) $z=i$ 이면 $(z+1)^2=(i+1)^2=2i$ (허수)

㉡ $(2z+1)(\bar{z}+1)-z=2z\bar{z}+(z+\bar{z})+1$ (실수)
($\because$ $z\bar{z}, z+\bar{z}$ 모두 실수이다.)

㉢ $(z^2+z+1)(\bar{z}+1)=Z$ 라 하면
(준식)$=Z+\overline{Z}$ 이므로 실수

따라서 실수인 것은 ㉡, ㉢이다.

40. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^{99}+\beta^{99}$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 에서 각각 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면

$\alpha^2-\alpha+1=0, \beta^2-\beta+1=0$

두 식에 각각 $\alpha+1, \beta+1$ 를 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0, (\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

$\therefore\ \alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=(\alpha^3)^{33}+(\beta^3)^{33}=-1-1=-2$

해설

$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=1$ 이므로

α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

$x^2-x+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=(x^3+1)=0$

$\alpha^3=-1, \beta^3=-1$

$\therefore \alpha^{99}+\beta^{99}=(\alpha^3)^{33}+(\beta^3)^{33}=-1-1=-2$