

1. x 에 대한 다항식 $x^3 + ax^2 + bx + 2$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 나눈 나머지가 $x + 3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = -6$

해설

검산식을 사용

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 = (x^2 - x + 1) \cdot A + (x + 3)$$

$$A = (x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + bx + 2 - (x + 3) = (x^2 - x + 1)(x + p)$$

$$x^3 + ax^2 + (b - 1)x - 1 = (x^2 - x + 1)(x - 1) \quad \therefore p = -1$$

우변을 정리하면

$$\therefore a = -2, b = 3$$

$$\therefore ab = -6$$

2. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy - y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + 2x + 2y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x - y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x - 2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

③ $(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^6 - y^6$

⑤ $(x + y - 1)(x^2 + y^2 - xy + x + y + 1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

3. $(10^5 + 2)^3$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라.

① 15

② 18

③ 21

④ 26

⑤ 28

해설

준식을 전개하면

$$\begin{aligned} &10^{15} + 2^3 + 3 \times 2 \times 10^5(10^5 + 2) \\ &= 10^{15} + 2^3 + 6 \times 10^{10} + 12 \times 10^5 \\ &= 10^{15} + 10^{10} \times 6 + 10^5 \times 12 + 8 \\ &\therefore 1 + 6 + 1 + 2 + 8 = 18 \end{aligned}$$

4. 복소수 $a^2(1+i) + a(3+2i) + 2$ 를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 a 의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

(준식) $= (a^2 + 3a + 2) + (a^2 + 2a)i \Rightarrow$ 순허수
즉, $a^2 + 3a + 2 = 0$
 $a^2 + 2a \neq 0$ 이므로 $\therefore a = -1$

5. $x = \frac{1-i}{1+i}$ 일 때, $x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2006} + x^{2007}$ 의 값을 계산하면?

① $-1-i$

② -1

③ $-i$

④ 1

⑤ i

해설

$$x = \frac{1-i}{1+i} = -i \quad x^2 = -1 \quad x^3 = i \quad x^4 = 1$$

$\therefore x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$ 이므로, 4개의 항마다 합이 0이 된다.

$$\Rightarrow x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2006} + x^{2007}$$

$$= 0 + 0 + \dots + x^{2005} + x^{2006} + x^{2007}$$

$$= (x^4)^{501} \cdot x + (x^4)^{501} \cdot x^2 + (x^4)^{501} \cdot x^3$$

$$= -i - 1 + i$$

$$= -1$$

6. $|x - 1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$|x - 1| = 3 - |x|$ 에서,
 $|x| + |x - 1| = 3$ 이다.
i) $x < 0$ 일 때,
 $-x - (x - 1) = 3$
 $\therefore x = -1$
ii) $0 \leq x < 1$ 일 때,
 $x - (x - 1) = 3$
 $0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
iii) $x \geq 1$ 일 때,
 $x + (x - 1) = 3$
 $\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
 $x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

7. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 한 근이 1일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 근이므로

$x = 1$ 을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$

주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$

따라서 다른 한 근은 $x = -1$

8. 이차방정식 $(a-b)x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$ 이 중근을 가질 조건을 구하면?(단, $a \neq b$)

① $a = b + c$

② $2a = b + c$

③ $a = b - c$

④ $2a = b - c$

⑤ $2a = 2b - c$

해설

$$\begin{aligned} D &= (b-c)^2 - 4(a-b)(c-a) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc - 4(ac - a^2 - bc + ab) \\ &= 4a^2 + b^2 + c^2 - 4ac + 2bc - 4ab \\ &= (2a - b - c)^2 \end{aligned}$$

준식이 중근을 가져야 하므로

$D = 0$ 이어야 한다.

따라서, $(2a - b - c)^2 = 0$, $2a - b - c = 0$

$\therefore 2a = b + c$

9. 방정식 $x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 0 \\ \therefore x &= 2, y = 4 \\ \therefore x + y &= 6 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 8y + 20 &= 0 \text{이 실근을 가지므로} \\ D/4 = 4 - (y^2 - 8y + 20) &\geq 0 \\ y^2 - 8y + 16 &\leq 0 \\ (y - 4)^2 &\leq 0, y = 4 \\ \text{준식에 대입하면 } x &= 2 \\ \text{따라서 } x + y &= 6 \end{aligned}$$

10. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\alpha + \beta = -\frac{(-10)}{2} = 5$$

$$\alpha\beta = \frac{6}{2} = 3$$

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$$

11. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한근이 ω 일 때 $x=\frac{2}{\omega+1}$ 가 $x^2+px+q=0$ 의 근이다. 이 때, 유리수 p, q 의 합을 바르게 구한 것은?

- ① -2
- ② 0
- ③ 2
- ④ 4
- ⑤ 8

해설

$$x^2+x+1=0 \text{의 두 근 : } \omega, \bar{\omega}$$
$$\omega+\bar{\omega}=-1, \omega\cdot\bar{\omega}=1$$
$$x^2+px+q=0 \text{의 두 근 : } \frac{2}{\omega+1}, \frac{2}{\bar{\omega}+1}$$
$$-p=\frac{2}{\omega+1}+\frac{2}{\bar{\omega}+1}=\frac{2(\omega+\bar{\omega})+4}{\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})+1}=2$$
$$q=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\bar{\omega}+1}=\frac{4}{\omega\bar{\omega}+(\omega+\bar{\omega})+1}=4$$
$$p=-2, q=4 \quad \therefore \quad p+q=2$$

해설

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$
$$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega \text{라 하자.}$$
$$\frac{2}{\omega+1}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}=1-\sqrt{3}i$$
$$\therefore \text{ 다른 한근은 쥘레복소수인 } 1+\sqrt{3}i \text{가 된다.}$$
$$p=-(\text{두근의 합})=-2, q=(\text{두근의 곱})=4$$
$$p+q=2$$

12. $x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두 근이 $1+i$, $1-i$ 일 때, 이 방정식의 나머지 두 근을 구하면?

① $x = -\frac{-1 + -\sqrt{3}i}{2}$

② $x = \frac{1 + -\sqrt{3}i}{2}$

③ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

④ $x = -1 \pm \sqrt{3}i$

⑤ $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

해설

$x^4 - x^3 + x^2 + 2 = 0$ 의 두근이 $1+i$, $1-i$ 이므로

$x^2 - 2x + 2$ 는 $x^4 - x^3 + x^2 + 2$ 의 인수이다.

따라서,

$$\therefore x^4 - x^3 + x^2 + 2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x + 1)$$

$$\therefore x^2 + x + 1 = 0 \text{ 일 때의 근은 } \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

13. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

① $x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5}$

② $x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$

③ $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

④ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

⑤ $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}, y = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

$$x^2 + xy - 2y^2 = 0 \text{에서}$$

$$(x - y)(x + 2y) = 0$$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + y^2 = 2y^2 = 25$$

$$y = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}, \quad x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

ii) $x = -2y$ 일 때

$$x^2 + y^2 = 5y^2 = 25$$

$$y^2 = 5, \quad y = \pm\sqrt{5}, \quad x = \mp 2\sqrt{5} \text{ (복호동순)}$$

$$\therefore \text{ 구하는 해는 } \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right), \quad \left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$(-2\sqrt{5}, \sqrt{5}), \quad (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$$

14. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \text{에서 } x^2 + (y - 1)^2 = 0$$

x, y 는 실수이므로 $x^2 \geq 0, (y - 1)^2 \geq 0$

따라서, $x = 0, y - 1 = 0$ 이므로 $x = 0, y = 1$

$$\therefore x + y = 0 + 1 = 1$$

15. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,
이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

16. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

② $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

17. 실수 x 가 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 을 만족할 때, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x 로 나누면

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= 3^3 - 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

18. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

- ① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2} \\ &= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2} \\ &= \frac{x - 1}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

19. $x^4 + 3x^2 + 4$ 를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$ ② $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - x + 2)$

③ $(x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x + 1)$

⑤ $(x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$

해설

$$\begin{aligned}x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \\&= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\&= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)\end{aligned}$$

20. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c) = b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형
④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
 $= b(b+2c) + (c+a)(c-a)$ 에서
 $\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$
 $a^2 - b^2 + 2bc - c^2 = -a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$
 $2a^2 = 2b^2 + 2c^2$
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2$
따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a 인 직각삼각형이다.

21. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ 2
- ④ $\sqrt{5}$
- ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ (x, y 는 실수)로 놓으면 $(x + yi)^2 = \sqrt{5} + i$
 $x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
 $x^2 - y^2 = \sqrt{5}, 2xy = 1$
 $z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$ 이므로
 $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$
 $x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
 $\therefore z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i, \bar{z}^2 = \sqrt{5} - i$
 $z^2\bar{z}^2 = (\sqrt{5} + i)(\sqrt{5} - i) = 6$
 $z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
 $z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

22. 복소수 $z = a + bi$ 가 다음 두 조건을 만족한다.

$(1 + i + z)^2 < 0 \qquad z^2 = c + 4i$

이 때, $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$(1 + i + z)^2 < 0$ 에서 $1 + i + z$ 는 순허수이다.
 $z = a + bi$ 라면
 $1 + i + z = 1 + i + a + bi = (1 + a) + (1 + b)i$
이것이 순허수이므로 $1 + a = 0, a = -1$
 $\therefore z = -1 + bi$
또한 $z^2 = c + 4i$ 에서 $(-1 + bi)^2 = c + 4i$
 $1 - 2bi - b^2 = c + 4i$
 $\therefore -2b = 4, 1 - b^2 = c$
 $\therefore b = -2, c = -3$
 $\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 14$

23. x 의 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q - 2 = 0$ 의 두 실근의 비가 1 : 2가 되도록 하는 실수 p, q 에 대하여 q 의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$
④ $q > -\frac{1}{2}$

② $q > \frac{1}{2}$
⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

③ $q \geq \frac{1}{2}$

해설

두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \alpha = p$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = 4q - 2 \quad \therefore \alpha^2 = 2q - 1$$

$$\text{따라서 } p^2 = 2q - 1$$

$$\text{한편 } D > 0 \text{에서 } 9p^2 - 4(4q - 2) > 0$$

$$9(2q - 1) - 16q + 8 > 0$$

$$2q - 1 > 0$$

$$\therefore q > \frac{1}{2}$$

24. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면
 $x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.
 $\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$
 $\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 $\alpha, 2\alpha$ 가 된다.
 $\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서 $b = \pm 12, c = 35$ 이므로
처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $-7, x = 5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합) $= (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$

25. x 의 이차방정식 $x^2 + (2m - 1)x + m^2 - m - 2 = 0$ 의 두 근이 모두 양이고, 또 한 근이 다른 근의 2배일 때, 실수 m 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$$D = (2m - 1)^2 - 4(m^2 - m - 2) = 9 > 0 \text{이므로}$$

서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 근을 α , 2α 라 하면

$$\alpha + 2\alpha = -(2m - 1) > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \times 2\alpha = m^2 - m - 2 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$$m < -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

또, ㉠에서의 $\alpha = \frac{1 - 2m}{3}$ 을 ㉡에 대입하여 풀면 $m = -4, 5$

조건 ㉢에 의해서 $m = -4$

26. 함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$ 의 그래프와 $g(x) = 3x - 4$ 의 그래프가 서로 다른 세 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 에서 만난다고 한다. 이 때 $y_1 + y_2 + y_3$ 의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

해설

x_1, x_2, x_3 는 방정식 $x^3 - 2x^2 + ax + b = 3x - 4$
즉 $x^3 - 2x^2 + (a - 3)x + b + 4 = 0$ 의 세 근 $x_1 + x_2 + x_3 = 2$
이 때, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 는
직선 $y = 3x - 4$ 위의 점이므로
 $y_1 = 3x_1 - 4, y_2 = 3x_2 - 4, y_3 = 3x_3 - 4$
 $\therefore y_1 + y_2 + y_3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 12$
 $\quad \quad \quad = 3 \cdot 2 - 12$
 $\quad \quad \quad = -6$

27. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 4a - 4$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 4a - 4 = (x - a)^2 - a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = a$ 일 때 최솟값 $-a^2 + 4a - 4$ 를 가진다.
 $\therefore m = -a^2 + 4a - 4 = -(a - 2)^2$
따라서 m 은 $a = 2$ 일 때 최댓값 0을 가진다.

28. $x + y = 3$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 일 때, $2x^2 + y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y = -x + 3$ 에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 이므로

$y = -x + 3 \geq 0 \rightarrow -x \geq -3 \rightarrow x \leq 3 \therefore 0 \leq x \leq 3$ ($\because x \geq 0$)

또 $2x^2 + y^2 = 2x^2 + (-x + 3)^2 = 2x^2 + x^2 - 6x + 9 = 3x^2 - 6x + 9$

완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2 - 2x) + 9 = 3(x - 1)^2 + 6$

$\therefore x = 1$ 일 때 최솟값 6, $x = 3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore M - m = 12$

29. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2 + 4kx + 5k^2 - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{A}$ 을 k 에 대하여 정리하면

$$5k^2 + 4xk + (x^2 - 1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B}$ 은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다. 따라서, 판별식 D 에 대하여

$$\frac{D}{4} = (2x)^2 - 5(x^2 - 1) \geq 0$$

$$-x^2 + 5 \geq 0, \quad x^2 - 5 \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots \cdots \textcircled{C}$$

그런데 α, β 는 $\textcircled{A}$ 의 실근이므로 $\textcircled{C}$ 의 범위 안에 있어야 한다.

$$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

30. 사차방정식 $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 을 만족하는 모든 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ 의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$x + \frac{1}{x} = t$ 로 치환하면

$$t^2 + t = 0, t(t + 1) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = -1$$

$$(i) \ x + \frac{1}{x} = 0 \text{ 일 때, } x^2 + 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm i$$

$$(ii) \ x + \frac{1}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$$x^2 + 1 = -x, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 근은

$$x = \pm i \text{ 또는 } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$\therefore (-i) + i + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -1$$

31. 삼차방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라 하고 $f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$ 라 정의할 때, $f(n) = 0$ 이 되게 하는 자연수 n 의 최솟값은?

- ① 2 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$$x^3 - 1 = 0$$
$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$
$$x^2 + x + 1 = 0 \text{의 한 근 } \omega$$
$$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2 + \omega + 1 = 0$$
$$f(n) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} + \cdots + \frac{1}{\omega^n}$$
$$f(1) = 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega + 1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$
$$f(2) = 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2 + \omega + 1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n 의 최솟값은 2

32. 연립방정식
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$$
의 해에 대한 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- I. 이 방정식은 a 의 값에 관계없이 항상 해를 갖는다.
- II. $a = -2$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 갖는다.
- III. 이 방정식이 무수히 많은 해를 가지는 a 는 꼭 한 개 있다.
- IV. 이 방정식이 유일한 해를 가지면, 그 해의 x, y, z 의 값은 모두 같다.

- ① II

② II, III

③ III, IV
- ④ I, III, IV

⑤ I, II, III, IV

해설

세 방정식을 더하면 $(a + 2)(x + y + z) = 3$
i) $a = -2$ 이면 이 방정식의 해는 없다.
따라서 I , II 는 옳지 않다.
ii) $a \neq -2$ 이면 $x + y + z = \frac{3}{a + 2} \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 에서 첫 번째 식을 빼면 $(a - 1)x = \frac{a - 1}{a + 2}$
따라서 $a = 1$ 이면 이 방정식은 무수히 많은 해를 가지고,
 $a \neq 1$ 이면 $x = \frac{1}{a + 2}$
같은 방법으로 $y = \frac{1}{a + 2}, z = \frac{1}{a + 2}$
따라서 III, IV 는 옳다.

33. 연립방정식 $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + xy + y^2 = 7 \end{cases}$ 을 만족하는 순서쌍 (x, y) 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x + y = u, xy = v$ 라 하면

$$\begin{cases} u + v = 5 & \cdots \textcircled{㉠} \\ u^2 - v = 7 & \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

①을 ②에 대입하면

$$u^2 - (5 - u) = 7$$
$$u^2 + u - 12 = 0$$
$$(u + 4)(u - 3) = 0$$

$\therefore u = -4$ 또는 $u = 3$

(i) $u = -4, v = 9$, 즉 $x + y = -4, xy = 9$ 일 때, x, y 는 $t^2 + 4t + 9 = 0$ 의 두 근이므로 $t = -2 \pm \sqrt{5}i$
따라서, $x = -2 \pm \sqrt{5}i, y = -2 \mp \sqrt{5}i$ 이므로 (복부호 동순)
 $(-2 + \sqrt{5}i, -2 - \sqrt{5}i), (-2 - \sqrt{5}i, -2 + \sqrt{5}i)$

(ii) $u = 3, v = 2$, 즉 $x + y = 3, xy = 2$ 일때, x, y 는 $t^2 - 3t + 2 = 0$ 의 두 근이므로
 $(t - 1)(t - 2) = 0$
 $\therefore t = 1$ 또는 $t = 2$
따라서, $x = 1, y = 2$ 또는 $x = 2, y = 1$ 이므로
 $(1, 2), (2, 1)$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 4개이다

34. p 가 실수일 때, 두 이차방정식 $x^2+px+3=0$, $x^2+3x+p=0$ 이 오직 한 개의 공통근 α 를 갖는다고 한다. 이 때, $\alpha-p$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\alpha^2 + p\alpha + 3 = 0$$

$$\alpha^2 + 3\alpha + p = 0$$

$$\alpha(p-3) - (p-3) = (\alpha-1)(p-3) = 0$$

$$\alpha = 1 \text{ or } p = 3$$

$$p = 3 \text{ 이면 두 다항식이 같아지므로 } \alpha = 1$$

$$\therefore 1 + p + 3 = 0 \quad \therefore p = -4$$

$$\therefore \alpha - p = 1 - (-4) = 5$$

35. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$

$m = -1, 7$

36. 다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x 에 대하여
- $$\frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
- $$= \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x-2} + \cdots + \frac{a_{2007}}{x-2007}$$
- 이 성립할 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007}$ 의 값을 구하면?
- ① 1

② -1

③ 1997

④ 0

⑤ -1997

해설

우변을 통분하면

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007})x^{2006} + \cdots}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$
$$= \frac{1}{(x-1)(x-2)\times\cdots\times(x-2007)}$$

주어진 등식은 항등식이므로 분자의 계수를 비교하면

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2007} = 0$$

37. x 에 대한 다항식 $x^{10}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x - 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $2^{10}(x - 2)$ 일 때, 상수 a, b 에 대하여 $3b - 2a$ 의 값은?

- ① 3
- ② 6
- ③ 8
- ④ 10
- ⑤ 12

해설

$$\begin{aligned} x^{10}(x^2 + ax + b) &= (x - 2)^2 Q(x) + 2^{10}(x - 2) \\ x^{10}(x^2 + ax + b) &= (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \} \text{이므로} \\ x^2 + ax + b &= (x - 2)(x - \alpha) \text{라 할 수 있다.} \\ x^{10}(x - 2)(x - \alpha) &= (x - 2) \{ (x - 2) Q(x) + 2^{10} \} \\ \therefore x^{10}(x - \alpha) &= (x - 2) Q(x) + 2^{10} \\ \text{양변에 } x = 2 \text{를 대입하면} \\ 2^{10}(2 - \alpha) &= 2^{10} \therefore \alpha = 1 \\ \therefore x^2 + ax + b &= (x - 2)(x - 1) \\ &= x^2 - 3x + 2 \\ a = -3, \quad b &= 2 \\ \therefore 3b - 2a &= 12 \end{aligned}$$

38. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $2f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지 $R(x)$ 는 $g(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지와 같다. $f(x)$ 를 $x^2 + 1$ 로 나눈 나머지가 $2x + 4$ 일 때, $R(10)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$\begin{aligned} 2f(x) - g(x) &= (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ g(x) &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) \text{라 둘 수 있다.} \\ \text{따라서 } 2f(x) &= g(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)B(x) + R(x) + (x^2 + 1)A(x) + R(x) \\ &= (x^2 + 1)\{A(x) + B(x)\} + 2R(x) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f(x) = (x^2 + 1)\frac{1}{2}\{A(x) + B(x)\} + R(x)$$

$$\therefore R(x) = 2x + 4 \text{이고 } R(10) = 24$$

39. 임의의 자연수 k 에 대하여 $x-k$ 로 나눈 나머지가 k 인 다항식 $f(x)$ 의 개수를 구하면?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 무수히 많다.

해설

나머지 정리에 의하여 임의의 자연수 k 에 대하여 $\therefore f(k) = k$
따라서 $g(x) = f(x) - x$ 로 두면 모든 자연수에 대해서 $g(x) = 0$
이 성립

$\therefore g(x) = 0$

즉, $f(x) = x$

$\therefore$ 1개

40. 다항식 $f_1(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_2(x)$, 나머지가 r_1 이고 다시 $f_2(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_3(x)$, 나머지가 r_2 이다. 이와 같은 방법으로 $f_n(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫이 $f_{n+1}(x)$, 나머지가 r_n 이고 $f_1(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 나머지를 $R(x)$ 라고 할 때, $R(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는?

- ① 0

② 1
- ③ r_1

④ $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$
- ⑤ $r_1 r_2 \cdots r_n$

해설

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= (x-1)f_2(x) + r_1 \\
 &= (x-1)\{(x-1)f_3(x) + r_2\} + r_1 \\
 &= (x-1)^2 f_3(x) + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^2 \{(x-1)f_4(x) + r_3\} + r_2(x-1) + r_1 \\
 &= (x-1)^3 f_4(x) + r_3(x-1)^2 + r_2(x-1) + r_1 \\
 &\vdots \\
 &= (x-1)^n f_{n+1}(x) + r_n(x-1)^{n-1} + r_{n-1}(x-1)^{n-2} + \cdots \\
 &\quad + r_2(x-1) + r_1 \\
 R(x) &= r_n(x-1)^{n-1} + \cdots + r_2(x-1) + r_1 \\
 \therefore R(2) &= r_n + r_{n-1} + \cdots + r_2 + r_1
 \end{aligned}$$