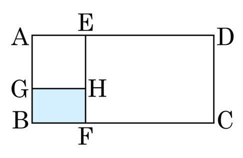
1. 다음 그림의 사각형 AGHE, 사각형 EFCD는 정사각형이고, $\overline{\mathrm{AD}} = a$, $\overline{\mathrm{AB}} = b$ 일때, 사각형 GBFH의 넓이는?



① $a^2 - 2ab - b^2$

② $a^2 + 3b^2 - 2ab$

③ $-a^2 + 3ab - 2b^2$

④ $-a^2 + 3ab - b^2$

⑤ $-a^2 + 2ab - b^2$

해설

$\square\mathrm{GBFH} = \square\mathrm{ABCD} - \square\mathrm{AGHE} - \square\mathrm{EFCD}$

$= ab - (a-b)^2 - b^2 = ab - (a^2 - 2ab + b^2) - b^2$

$= -a^2 + 3ab - 2b^2$

2. x 에 대한 다항식 $4x^3-3x^2+ax+b$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 갖도록 $a+b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -37

해설

$P(x)=4x^3-3x^2+ax+b$ 라 하고 $P(x)$ 가 $(x+1)(x-3)$ 을 인수로 가지려면

$P(-1)=P(3)=0$

$P(-1)=-4-3-a+b=0 \ \therefore\ a-b=-7$

$P(3)=108-27+3a+b=0 \ \therefore\ 3a+b=-81$

$\therefore\ a=-22,\ b=-15$

3. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}&=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}\\&=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}\\&=a+1=2000\end{aligned}$$

4. $(1+i)^{10}$ 의 값은?

① $10-i$ ② $4i$ ③ $8i$ ④ $16i$ ⑤ $32i$

해설

$$(1+i)^{10} = \left\{(1+i)^2\right\}^5 = (1+2i+i^2)^5$$
$$= (2i)^5 = 2^5 \cdot i^5 = 32i$$

5. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면
$(x + 2)^2 = (-i)^2$ 이므로
$x^2 + 4x = -5$
$\therefore\ x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$

6. 다음 <보기>에서 계산 중 잘못된 것을 모두 고르면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

보기

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{(-3)\cdot(-3)} = \sqrt{9} = 3$
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5\times(-2)} = \sqrt{-10} = \sqrt{10}i$
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \sqrt{\dfrac{2}{-6}} = \sqrt{-\dfrac{1}{3}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{-10}{2}} = \sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅱ, Ⅳ ⑤ Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt{-3}\sqrt{-3} = \sqrt{3}i\sqrt{3}i = \sqrt{9}i^2 = -3$
∴ 옳지 않다.
Ⅱ. $\sqrt{5}\sqrt{-2} = \sqrt{5}\sqrt{2}i = \sqrt{10}i$
∴ 옳다.
Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{-6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}i} = \sqrt{\dfrac{2}{6}}\cdot\dfrac{i}{i^2} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}i$
∴ 옳지 않다.
Ⅳ. $\dfrac{\sqrt{-10}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}i}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}}i = \sqrt{5}i$
∴ 옳다.

7. 이차방정식 $x^2+(m+1)x+m+4=0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3 ② 0 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D=0$

$D=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot(m+4)=m^2-2m-15=0$

$(m-5)(m+3)=0 \quad \therefore\ m=-3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3+5=2$

8. x에 대한 이차식 $2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이 될 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2x^2+(k+1)x+k-1$이 완전제곱식이므로

$D=(k+1)^2-8(k-1)=0$

$(k-3)^2=0$

$\therefore\ k=3$

9. 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $f(1)=f(3)=8$이고 최솟값 5를 가질 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로
이차함수는 $f(x)=a(x-2)^2+5$ 라고 할 수 있다.
$f(3)=8$이므로 $x=3,\ y=8$을 대입하면
$a+5=8\quad \therefore\ a=3$ 이므로
$f(x)=3(x-2)^2+5=3x^2-12x+17$
$\therefore\ a+b+c=8$

10. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0$ 을 풀면?

① $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$　　② $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$

③ $x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$　　④ $x = \pm 2,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = \pm 2,\quad x = 3 \pm \sqrt{2}i$

해설

조립제법을 이용한다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -2 & 2 & 2 & -3 \\
 & & 1 & -1 & 1 & 3 \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & 3 & \boxed{0} \\
 & & -1 & 2 & -3 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow\quad (x-1)(x+1)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore x = \pm 1,\quad x = 1 \pm \sqrt{2}i$

11. $3x^2+2xy-y^2-x+3y-2$의 인수인 것은?

① $2x+y+1$ ② $x+y+1$ ③ $2x-y+1$
④ $3x-y+2$ ⑤ $3x+y+2$

해설

준 식을 내림차순으로 정리하면
$3x^2+2xy-x-y^2+3y-2$
$=3x^2+(2y-1)x-(y-1)(y-2)$
인수분해하면 $(x+y-1)(3x-y+2)$

12. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$을 인수분해 했을 때 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x+2$

④ $(x-1)^2$ ⑤ $(x+1)^2$

해설

조립제법을 이용한다.

1	1	1	-3	-1	2
		1	2	-1	-2
1	1	2	-1	-2	0
		1	3	2	
-1	1	3	2	0	
		-1	-2		
-2	1	2	0		
		-2			
	1	0			

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x-1)^2(x+1)(x+2)$$

13. $a+b-2c=1,\ a-b+3c=3$일 때, 다음 중 $a+ab+c^2$을 a에 관한 식으로 나타낸 것은?

① $(a-8)(a-2)$　　② $(a+8)(a-2)$
③ $-(a-8)(a-2)$　　④ $-(a-8)(a+2)$
⑤ $-(a+8)(a-2)$

해설

$a+b-2c=1 \quad \cdots$ ㉠
$a-b+3c=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠+㉡에서 $2a+c=4$
$\therefore c=-2a+4 \quad \cdots$ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $b=-5+9$

$$\begin{aligned}\therefore a+ab+c^2 &= a+a(-5a+9)+(-2a+4)^2 \\ &= -a^2-6a+16 \\ &= -(a^2+6a-16) \\ &= -(a+8)(a-2)\end{aligned}$$

14. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

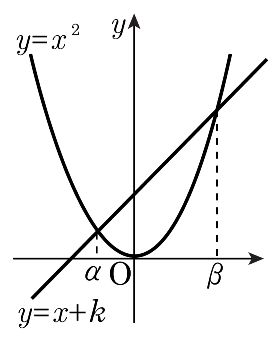
1 이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 근이므로
$x = 1$ 을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

15. 이차방정식 $x^2+4x+a=0$ 의 한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 일 때, ab 의 값은?
(단, a, b 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① -14 ② -13 ③ -12 ④ -11 ⑤ -10

해설
한 근이 $b+\sqrt{2}i$ 이면 다른 한 근은 $b-\sqrt{2}i$ 이다.
근과 계수와의 관계를 이용하면
$2b=-4,\ b^2+2=a$
$\therefore\ a=6,\ b=-2,\ ab=-12$

16. 이차함수 $y = x^2$ 과 일차함수 $y = x + k$ 의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만날 때, 다음 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

㉠ $\alpha + \beta = 1$　　㉡ $k > 0$　　㉢ $\alpha\beta = -k$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

두 함수 $y = x^2$ 과 $y = x + k$ 의 그래프가 만나는 두 점의 x좌표가 α, β 이므로 이차방정식 $x^2 = x + k$, 즉 $x^2 - x - k = 0$ 은 서로 다른 두 실근 α, β 를 갖는다.

㉠ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = 1 \cdots$ (참)

㉡ 이차방정식 $x^2 - x - k = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D = 1 + 4k > 0$
에서 $k > -\frac{1}{4} \cdots$ (거짓)

㉢ 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta = -k \cdots$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㉠, ㉢이다.

17. 함수 $y=(x^2-2x+3)^2-2(x^2-2x+3)+1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t=x^2-2x+3$ 으로 놓으면
$y=t^2-2t+1=(t-1)^2\cdots$ ㉠
또, $t=(x-1)^2+2$ 이므로
$t\geq 2\cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t=2$일 때 1이다.

18. x, y가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$
$= -(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 3$
$= -(x - 1)^2 - (y - 2)^2 + 8$
$x,\ y$는 실수이므로 $(x - 1)^2 \geq 0,\ (y - 2)^2 \geq 0$
따라서 $2x - x^2 + 4y - y^2 + 3$은
$x - 1 = 0,\ y - 2 = 0$일 때 최댓값 8을 갖는다.

19. 삼차방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 한 근이 $1 - \sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b에 대하여 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 7

해설

방정식 $x^3 - ax - b = 0$의 계수가 유리수이므로
세 근을 $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$, α라고 하면
$\left(1 - \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right) + \alpha = 0 \quad \cdots ㉠$
$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha + \left(1 - \sqrt{2}\right)\alpha = -a \quad \cdots ㉡$
$\left(1 - \sqrt{2}\right)\left(1 + \sqrt{2}\right)\alpha = b \quad \cdots ㉢$
㉠에서 $\alpha = -2$를 ㉡에 대입하면
$-a = 1 - 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} = -5 \quad \therefore\ a = 5$
$\alpha = -2$를 ㉢에 대입하면 $b = -2(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 2$
$\therefore\ a + b = 5 + 2 = 7$

20. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, x^{51} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 에서

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = 0$

$\therefore x^3 + 1 = 0$

$x^3 = -1$

$x^{51} = (x^3)^{17} = (-1)^{17} = -1$

21. 두 다항식 $f(x) = x^3 - 5, g(x) = x^3 + 3x + 1$에 대하여 $f(x) = 0$의 세 근을 α, β, γ라고 할 때, $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$의 값은?

① 350　　② 351　　③ 352　　④ 353　　⑤ 354

해설

$f(x) = 0$의 세 근이 α, β, γ 라고 하면 $\alpha^3 = 5, \beta^3 = 5, \gamma^3 = 5$ 이다.

$g(\alpha) = \alpha^3 + 3\alpha + 1 = 3\alpha + 6$, $g(\beta) = \beta^3 + 3\beta + 1 = 3\beta + 6$, $g(\gamma) = \gamma^3 + 3\gamma + 1 = 3\gamma + 6$ $g(\alpha)g(\beta)g(\gamma)$

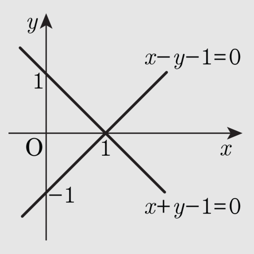
$= (3\alpha+6)(3\beta+6)(3\gamma+6) = 351$ ($\because \alpha+\beta+\gamma = 0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = 5$)

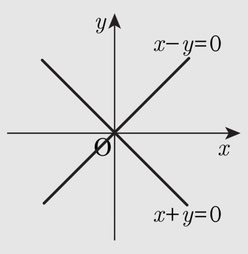
22. 좌표평면에서 두 영역 $(x+y-1)(x-y-1)=0$, $x^2-y^2=0$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 무한히 많다.　② 0개　③ 1개
④ 2개　⑤ 4개

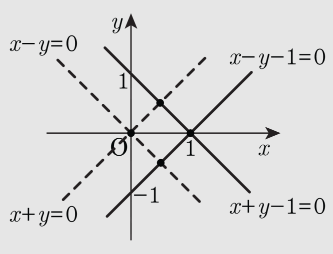
해설

두 영역을 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.





이것을 하나의 좌표평면에 그리면



위에서 점선과 실선의 교점의 개수는 2개이다.

23. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 \\ 5x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 의 근을 $x = \alpha,\ y = \beta$라 할 때, $\alpha + \beta$의 최댓값은?

① 4　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 0 & \cdots ① \\ 5x^2 - y^2 = 4 & \cdots ② \end{cases}$

①식을 인수분해하면

$(2x - y)(x - y) = 0 \quad \therefore\ y = 2x,\ y = x$

②식에 대입하면

$y = 2x$일 때 $5x^2 - (2x)^2 = 4,\ x^2 = 4,\ x = \pm 2,\ y = \pm 4$

$y = x$일 때 $5x^2 - x^2 = 4,\ \ 4x^2 = 4\ x^2 = 1,\ \ x = \pm 1,\ y = \pm 1$

$\therefore \alpha + \beta = 6,\ -6,\ 2,\ -2$

$\therefore \alpha + \beta$ 의 최댓값은 6

24. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a > b,\ b > c,\ c > d$이면 $a > d$

㉡ $a > b > 0$이면 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

㉢ $a > b > 0,\ c > d > 0$이면 $ac > bd$

㉣ $ac > bc$이면 $a > b$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $a > b,\ b > c$이면 $a > c$
$a > c,\ c > d$이면 $a > d$ (참)

㉡ $a > b > 0$이므로 $a - b > 0,\ ab > 0$이다.
$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{a-b}{ab} > 0 \therefore \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$(참)

㉢ $c > d$이고 $a > 0$이므로 $ac > ad$
$a > b$이고 $d > 0$이므로 $ad > bd$
따라서 $ac > bd$(참)

㉣ $c < 0$일 때 $ac > bc$이면 $a < b$이다. (거짓)

25. 부등식 $|x|+|x-2| \le 3$을 풀면 $m \le x \le n$이다. $m+n$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x < 0$일 때

$-x - x + 2 - 3 \le 0$

$-2x \le 1$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x < 0$

ii) $0 \le x < 2$일 때

$x - x + 2 \le 3$

$\therefore\ 0 \le x < 2$

iii) $x \ge 2$일 때

$2x - 2 \le 3$

$2x \le 5$

$\therefore\ 2 \le x \le \frac{5}{2}$

i), ii), iii) 에서 $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{2}$

$\therefore m = -\frac{1}{2},\ n = \frac{5}{2},\ m + n = 2$

26. x에 관한 이차부등식 $x^2+ax+2a-3>0$이 모든 실수 x에 대하여 성립하도록 상수 a의 범위를 구하면 $p<a<q$이다. 이 때, pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq=12$

해설

$x^2+ax+2a-3>0$이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D<0$을 만족해야 한다.
$D=a^2-4(2a-3)<0$
$a^2-8a+12<0$
$(a-6)(a-2)<0$
$2<a<6 \quad \therefore p=2, q=6$
$\therefore \ pq=2\times6=12$

27. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0(a\neq 0)$에서

$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$

$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 7+\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$

따라서, 구하는 두 근의 합은

$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

28. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times 2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005 = x$ 로 놓으면

$$(\text{준 식}) = \frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}$$
$$= \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}$$
$$= x+1$$
$$= 2006$$

29. 두 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2=7$, $x+y=3$ 일 때, x^5+y^5의 값을 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： 123

해설

$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$에서 $3^2 = 7+2xy$, $xy=1$
$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$에서 $x^3+y^3=18$

$$\begin{aligned} x^5+y^5 &= (x^2+y^2)(x^3+y^3) - x^2y^2(x+y) \\ &= 7\times 18 - 1^2\times 3 \\ &= 123 \end{aligned}$$

30. 다항식 $f(x)$를 x^2+x+1로 나누면 $3x+2$가 남고, 그 몫을 $x-1$로 나누면 2가 남는다. 이 다항식 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $\frac{1}{2}R(2)$의 값을 구하면?

① 41　　② 31　　③ 21　　④ 11　　⑤ 1

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)+3x+2 \\ &= (x^2+x+1)\{(x-1)p(x)+2\}+3x+2 \\ &= (x^3-1)p(x)+2x^2+5x+4 \end{aligned}$$

$\therefore R(x)=2x^2+5x+4$

$\therefore \frac{1}{2}R(2)=11$

31. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)Q(x)-2 \ \cdots ㉠ \\ xf(x)=(x-\alpha)Q'(x)-2 \ \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times x =$ ㉡에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x-\alpha)Q(x)-2x \\ &= (x-\alpha)Q(x)-2(x-\alpha)-2\alpha \\ &= (x-\alpha)\{Q(x)-2\}-2\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ -2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)-2$

$\therefore\ f(1)=-2$

해설

$f(x)+2,\ xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0$ $\therefore$ $f(\alpha)=-2\cdots$①

$\alpha f(\alpha)+2=0\cdots$②

①, ②에서 $\alpha=1$

$\therefore\ f(1)=f(\alpha)=-2(\because$ ①$)$

32. α, β가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것의 개수는?(단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 각각 α, β의 켤레복소수이고, $i = \sqrt{-1}$이다.)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$이면 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$이면 $\alpha = 0$, $\beta = 0$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 없다

해설

㉠ $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수)라 하면
$\alpha = \overline{\beta}$이므로 $\beta = a - bi$
$\therefore\ \alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$
$\alpha\beta = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
$\therefore\ \alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 실수이다.
㉡ :㉠에서 $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0$, a, b는 실수이므로 $a = 0$, $b = 0$ 즉, $= a + bi = 0$이다.
㉢ :(반례) $\alpha = i$, $\beta = 1$
$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 = i^2 + 1^2 = 0$
㉣ :(반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$
$\therefore\ \alpha + \beta i = 0$
$\therefore$ ㉢, ㉣는 α, β가 실수일 때만 성립한다.

33. α, β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$\boxed{(x-\alpha)(x-\beta)+k=0}$$

① $\alpha,\ \beta$　　② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$　　③ $p,\ q$

④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$　　⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면
$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$
이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k \cdots$ ㉮
방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$
$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉮ 대입)
$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$
따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

34. 이차방정식 $x^2 - px + q = 0$의 두 근을 α, β라고 하자. α^2, β^2이 방정식 $x^2 - 3px + 4(q-1) = 0$의 두 근일 때, p의 값은?

① -4 또는 1 ② -3 또는 2 ③ -2 또는 3
④ -1 또는 4 ⑤ 2 또는 5

해설

$\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = q \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha^2 + \beta^2 = 3p,\ \alpha^2\beta^2 = 4(q-1) \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서
$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$\therefore\ 3p = p^2 - 2q \cdots\cdots$ ㉢
$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2$
$\therefore\ 4(q-1) = q^2 \cdots\cdots$ ㉣
㉣에서 $q^2 - 4q + 4 = 0,\ (q-2)^2 = 0$
$\therefore\ q = 2$
㉢에 대입하여 정리하면,
$p^2 - 3p - 4 = 0,\ (p+1)(p-4) = 0$
$\therefore\ p = -1,\ 4$

35. 서로 다른 세 정수 a, b, c에 대하여 삼차방정식 $(x-a)(x-b)(x-c)=2$ 가 정수근을 가질 때, 이 근은?

① $\dfrac{a+b+c}{3}$　② $\dfrac{a+b+c-1}{3}$　③ $\dfrac{a+b+c-2}{3}$
④ $\dfrac{a+b+c-3}{3}$　⑤ $\dfrac{a+b+c-4}{3}$

해설

$a < b < c$ 라 가정했을때, 정수근을 α라고 하면, $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)=2$를 만족하는 순서쌍은 $(1,-1,-2)$ 밖에 없다.

$\Rightarrow \alpha-a=1$

$\alpha-b=-1$

$\alpha-c=-2$

세 식을 다 더하면,

$3\alpha=a+b+c-2$, $\alpha=\dfrac{a+b+c-2}{3}$

36. 부등식 $(x-2)(ax-1)<0$의 해에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 이 부등식의 해가 존재하지 않는 실수 a가 있다.
② $a=0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
③ $a<0$이면 이 부등식의 해는 $\frac{1}{a}<x<2$이다.
④ $a>0$이면 이 부등식의 해는 $x<2$이다.
⑤ ①, ②, ③, ④ 모두 거짓이다.

해설

① $a \neq 0$일 때
$(x-2)(ax-1)=a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)$이므로
$a=\frac{1}{2}$이면 이 부등식의 해는 없다.

② $a=0$이면 이 부등식은 $-(x-2)<0$,
즉 $x-2>0$이므로 해는 $x>2$이다.

③ $a<0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)>0$이므로
$x<\frac{1}{a}$ 또는 $x>2$이다.

④ $a>0$이면 이 부등식은 $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right)<0$이므로
$a<\frac{1}{2}$일때, $2<x<\frac{1}{a}$,
$a>\frac{1}{2}$일때 $\frac{1}{a}<x<2$이다.

37. 부등식 $x^2 - 3 < x + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha + \beta$의 값은 ?

① -1　　② 0　　③ 2　　④ 4　　⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2 - 3 < x + |2x + 1|$

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$일 때,

$x^2 - 3 < x + 2x + 1,\ x^2 - 3x - 4 < 0$

$(x - 4)(x + 1) < 0$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \leq x < 4$

(ii) $x < -\frac{1}{2}$일 때,

$x^2 - 3 < x - (2x + 1),\ x^2 + x - 2 < 0$

$(x + 2)(x - 1) < 0$

$\therefore\ -2 < x < -\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $-2 < x < 4$

$\therefore\ \alpha = -2,\ \beta = 4$

$\therefore\ \alpha + \beta = 2$

38. $6[x]^2 - 31[x-1] - 13 < 0$을 풀면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수)

① $-3 \le x < 3$　② $-2 \le x < 5$　③ $0 \le x < 3$
④ $1 \le x < 5$　⑤ $1 \le x < 6$

해설

$n \le [x] < n+1$에서
$n-1 < [x-1] < n$이므로
$[x-1] = [x]-1$
$\therefore 6[x]^2 - 31[x-1] - 13$
$= 6[x]^2 - 31([x]-1) - 13$
$= 6[x]^2 - 31[x] + 18 < 0$
$\therefore (2[x]-9)(3[x]-2) < 0$
$\frac{2}{3} < [x] < \frac{9}{2}$
$\therefore 1 \le [x] \le 4$이므로
$[x] = 1,\ 2,\ 3,\ 4$
$\therefore 1 \le x < 5$

39. 이차부등식 $ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0$ 의 해가 $|x| < |a|$ 과 일치하도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a - b$ 의 값은 ?

① -1　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 1

해설

$|x| < |a| \iff x^2 < a^2 \iff x^2 - a^2 < 0 \cdots$ ①

$\iff ax^2 + (a^2 - 1)x + b > 0 \cdots$ ②

$\therefore a < 0,\ a^2 - 1 = 0$

$\therefore a = -1$

$a = -1$ 일 때 ①은 $x^2 - 1 < 0$, ②는 $-x^2 + b > 0$

$\therefore b = 1 \therefore a - b = -2$

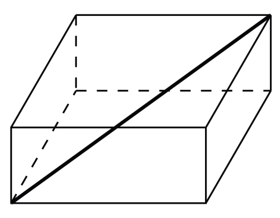
40. 두 부등식 $x^2+2x-15>0$, $x^2-x+k\le 0$에 대하여 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 6$일 때, 상수 k 의 값은?

① -48　② -30　③ -18　④ 12　⑤ 24

해설

부등식 $x^2+2x-15>0$ 에서
$(x+5)(x-3)>0$, $x>3$ 또는 $x<-5$
부등식 $x^2-x+k\le 0$ 에 대하여
두 부등식의 공통범위가 $3<x\le 6$ 이므로
$x^2-x+k\le 0$ 를 만족하는 범위는
$-5\le x\le 6$ $(x-6)(x+5)\le 0$
$x^2-x-30\le 0$
$\therefore k=-30$

41. 다음 그림과 같이 대각선의 길이가 3이고 겉넓이가 16, 부피가 6인 직육면체가 있다. 이 직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, b, c라 할 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?



① 12 ② 18 ③ 21 ④ 23 ⑤ 30

해설

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3,\ abc=6,\ 2(ab+bc+ca)=16$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$(a+b+c)^2=25,\ a+b+c=5(\because a,b,c\text{는양수})$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\ \cdots$①

①에 각각 대입하면

$a^3+b^3+c^3-18=5\times(9-8)$

$a^3+b^3+c^3=23$

42. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$ 라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$ 이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

43. 모든 실수 x에 대하여 $(x-1)^{10} = a_0x^{10} + a_1x^9 + a_2x^8 + \cdots + a_{10}$이 성립할 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값은? (단, a_i는 상수, $i = 0,\ 1,\ 2, \cdots, 10$)

① -2^{10}　② -2^9　③ 2^9　④ 2^{10}　⑤ 2^{55}

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 0 \cdots$①

양변에 $x = -1$을 대입하면

$a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + a_{10} = 2^{10} \cdots$②

① − ②하면 $2(a_1 + a_3 + \cdots + a_9) = -2^{10}$

$\therefore\ a_1 + a_3 + \cdots + a_9 = -2^9$

44. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 에 대하여 $z = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 이라 할 때, $7z\bar{z}$ 의 값을 구하시오.
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$ 이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 복소수 x, y 에 대하여 $\overline{\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ 이다.

$z = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ 에서 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}i}{2}$ 이므로
직접 α 를 대입하여 z 를 구하고 $\bar{z}$ 를 구해서 풀 수도 있지만 그렇게 하면 계산이 너무 어려워진다.
따라서 복소수의 켤레복소수의 성질을 이용하여 풀도록 시도해 보자.

주어진 문제에서 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}i}{2}$

이므로 $\bar{\alpha} = \frac{1-\sqrt{5}i}{2}$ 이다.

따라서, $\alpha + \bar{\alpha} = 1$, $\alpha\bar{\alpha} = \frac{3}{2}$ 이고

$z = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$, $\bar{z} = \frac{\bar{\alpha}-1}{\bar{\alpha}+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{(\alpha-1)(\bar{\alpha}-1)}{(\alpha+1)(\bar{\alpha}+1)} \\ &= \frac{\alpha\bar{\alpha}-(\alpha+\bar{\alpha})+1}{\alpha\bar{\alpha}+(\alpha+\bar{\alpha})+1} \\ &= \frac{\frac{3}{2}-1+1}{\frac{3}{2}+1+1} \\ &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

$\therefore\ 7z\bar{z} = 7 \times \frac{3}{7} = 3$

45. 복소수 $z_1 = 1 - i$에 대하여 $z_{n+1} = \overline{z_n} + (1+i)$이라 하자. $z_{100} = a + bi$라 할 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 실수이고 $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 98 ② 99 ③ 100 ④ 101 ⑤ 102

해설

$z_1 = 1 - i$

$z_2 = 1 + i + 1 + i = 2 + 2i$

$z_3 = 2 - 2i + 1 + i = 3 - i$

$z_4 = 4 + 2i \cdots$

$\Rightarrow z_{2n} = 2n + 2i, z_{2n-1} = (2n-1) - i$ (n 은 자연수)

$\therefore z_{100} = 100 + 2i, a + b = 102$

46. x에 대한 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$의 그래프가 실수 k의 값에 관계없이 직선 $y = 2ax - a^2$에 접할 때, 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k$ 의 그래프가 직선 $y = 2ax - a^2$ 에 접하므로

이차방정식 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 4k = 2ax - a^2$

즉, $x^2 - 2(k + a)x + k^2 + a^2 - 4k = 0$ 의 판별식을 D라고 하면

$\frac{D}{4} = (k + a)^2 - (k^2 + a^2 - 4k) = 2ak + 4k = (2a + 4)k$ 이고

k 의 값에 관계없이 $D = 0$ 이어야 하므로

$2a + 4 = 0$

$\therefore a = -2$

47. $x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$일 때, $x+\frac{1}{x}$의 값은?(단, x는 실수)

① $-1+\sqrt{6}$　　② $-1-\sqrt{6}$　　③ $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
④ $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$　　⑤ 1

해설

(i) $x \neq 0$이므로
$x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$x^2+2x-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}{}^{2}=0$

$\therefore \left(x^2+\frac{1}{x}{}^{2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=t$로 놓으면
$(t^2-2)+2t-3=0,\ t^2+2t-5=0$
$\therefore\ t=-1\pm\sqrt{6}$

(ii) $x+\frac{1}{x}=-1\pm\sqrt{6}$

그런데 $\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$이므로
($\because$ x는 실수)

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=-1-\sqrt{6}$

48. 연립방정식 $\begin{cases} \dfrac{xy}{2x+y} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{zy}{y+z} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{zx}{z+4x} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$ 을 만족하는 x, y, z에 대해서 $\dfrac{yz}{x}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{8}{3}$ ④ $\dfrac{7}{5}$ ⑤ $\dfrac{4}{6}$

해설

각 식의 양변을 역수 취해도 등식은 성립한다.

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{2x+y} = \dfrac{1}{5} \to \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{x} = 5 \cdots ① \\ \dfrac{zy}{y+z} = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{y} = 2 \cdots ② \\ \dfrac{zx}{z+4x} = \dfrac{1}{4} \to \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{z} = 4 \cdots ③ \end{cases}$$

① − ③ : $\dfrac{2}{y} - \dfrac{4}{z} = 1 \cdots ④$

② × 2 − ④ : $\dfrac{6}{z} = 3$

$z = 2$

$z = 2$ 를 ②, ③에 각각 대입하면

$y = \dfrac{2}{3}, x = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{yz}{x} = \dfrac{\dfrac{2}{3} \times 2}{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{8}{3}$

49. 버스가 P시와 Q시 사이를 상, 하행 모두 같은 시간 간격으로 운행하고 있다. P시에서 Q시로 자전거를 타고 가는 사람이 어떤 곳에서 상, 하행버스를 동시에 만나고 6분 후에 P시행의 버스를 만났고, 다시 6분이 지난 후에 Q시행의 버스에 추월당했다. 버스의 속력이 일정할 때, 버스는 몇분 간격으로 운행되는가?

① 6분 ② 8분 ③ 10분 ④ 12분 ⑤ 14분

해설

버스의 속력을 a m/min, 자전거의 속력을 b m/min, 버스의 운행 간격을 t분이라 하면

$$\begin{cases} 6a + 6b = at \\ 12a - 12b = at \end{cases}$$

$\therefore a = 3b,\ t = 8$

즉, 8분 간격으로 운행된다.

50. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=-5 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대해 $x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0　　② 1　　③ -1　　④ 2　　⑤ -2

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 로 놓으면

①은 $u+v=-5$ $\cdots\cdots$ ③

②는 $u^2-v=7$ $\cdots\cdots$ ④

③, ④에서 v 를 소거하면

$u^2+u-2=0$

$\therefore\ (u-1)(u+2)=0$

$u=1$ 일 때, $v=-6$ 이므로

$t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2,\ 3$

$u=-2$ 일 때, $v=-3$ 이므로

$t^2+2t-3=0$ 에서 $t=1,\ -3$

따라서, 구하는 근은

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore\ M=1,\ \ m=-2\ \ \therefore\ M+m=-1$